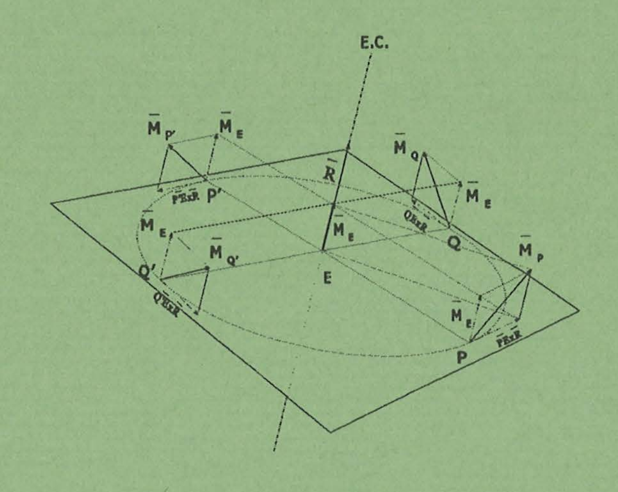
APUNTES SOBRE LA

TEORÍA DE VECTORES DESLIZANTES

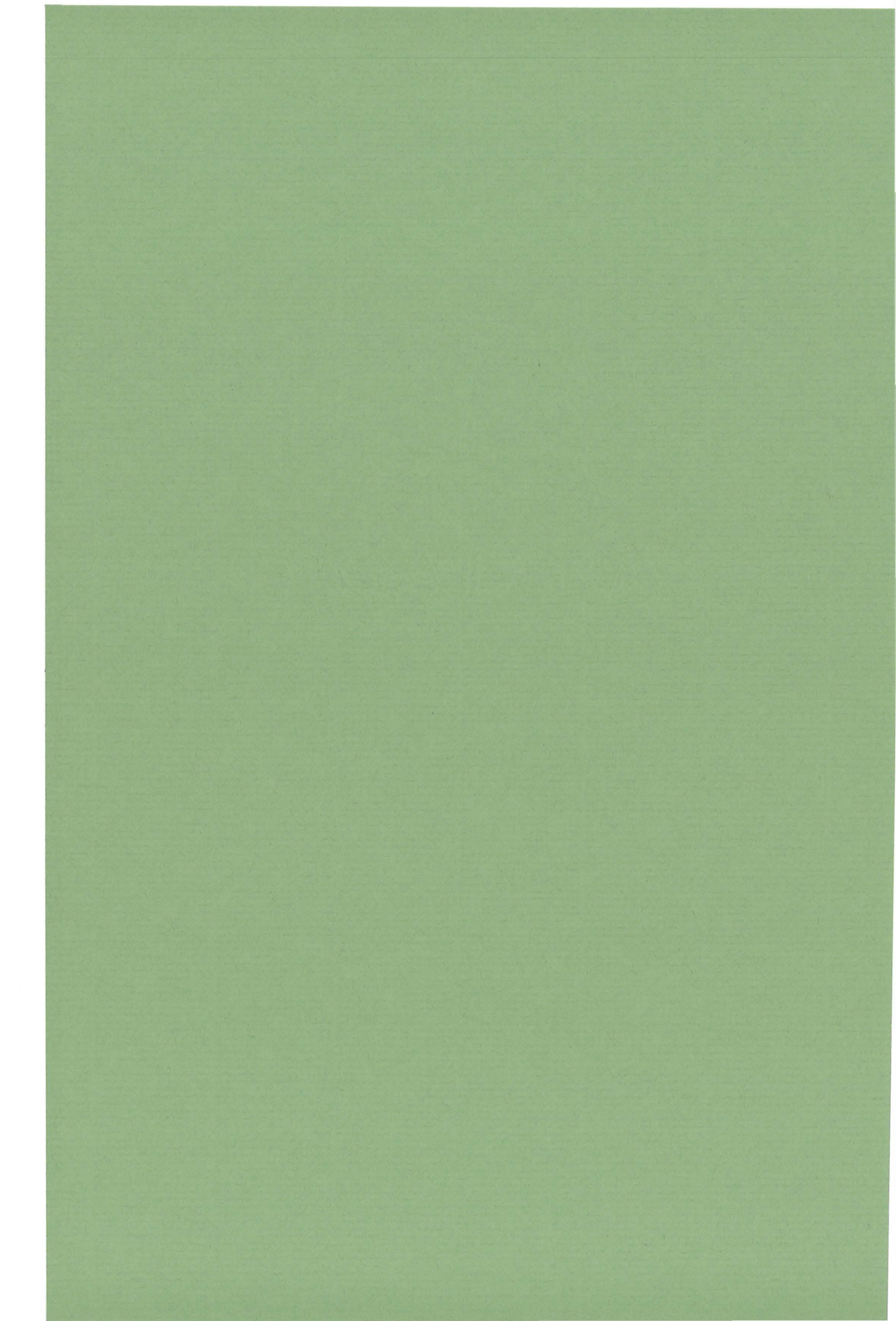
por

ISABEL MÁS ROBLEDO

DESARROLLADOS SOBRE LAS LECCIONES TEÓRICAS
IMPARTIDAS POR EL CATEDRÁTICO
FÉLIX SORIANO SANTANDREU



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID



APUNTES SOBRE LA

TEORÍA DE VECTORES DESLIZANTES

por

ISABEL MÁS ROBLEDO

DESARROLLADOS SOBRE LAS LECCIONES TEÓRICAS
IMPARTIDAS POR EL CATEDRÁTICO
FÉLIX SORIANO SANTANDREU

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

Apuntes sobre la teoría de vectores deslizantes.

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
CUADERNO 16.01
ISBN 84-89977-14-3
Depósito Legal: M-7120-1998

1. CÁLCULO VECTORIAL

1.1 INTRODUCCIÓN TEÓRICA

En Física hay magnitudes que quedan definidas cuando se conoce exclusivamente su valor numérico en un determinado sistema de unidades. La duración de un fenómeno, por ejemplo, queda fijada por un número que indica horas, minutos, segundos. Entre estas magnitudes, denominadas ***ESCALARES***, se encuentran igualmente las geométricas (longitud, área, volumen), las mecánicas (masa, energía), las térmicas (temperatura...), etc. Sin embargo, para definir otras magnitudes se necesita, al menos, conocer también su dirección y sentido de actuación. Son las denominadas magnitudes ***VECTORIALES***, entre las que se encuentran el desplazamiento de un móvil, la velocidad, la aceleración, las fuerzas, etc.

El cálculo vectorial no forma parte, en rigor, de la Física sino que constituye una herramienta matemática que permite abreviar la solución de problemas que, eventualmente, pueden tener contenido físico, surgiendo la oportunidad de utilizarlo en otros capítulos. Es decir, el carácter abstracto de la teoría vectorial en sí tendrá su aplicación cuando magnitudes de la Física tengan un comportamiento asimilable a un vector (Libre, Deslizante o Fijo) siendo por ello usual preceder la explicación de la Mecánica con una introducción sobre las características fundamentales de dicho cálculo, suponiendo conocidas las definiciones y propiedades básicas que se resumen a continuación:

1.2 DEFINICIÓN DE VECTOR. NOTACIÓN VECTORIAL

Magnitud dirigida (caracterizada por módulo, dirección y sentido). Aparece de modo natural en Física para representar magnitudes que, como la velocidad, la aceleración, la fuerza, etc., requieren para su especificación no sólo una cantidad (módulo) sino también una dirección (la de la recta que les contiene) y, sobre ella, un sentido. En Física se distingue entre:

- ***Vectores fijos***, que son aquellos que deben suponerse ligados a su punto de aplicación (que se precisa especificar). Son, quizás, los más "reales" de los que se utilizan en la Física, ya que el valor de una magnitud vectorial varía, por lo general, de un punto a otro del espacio (campos de vectores). Tal ocurre, por ejemplo, con la velocidad o aceleración de los diferentes puntos de un sólido o de un fluido; con las fuerzas actuantes sobre la materia, por lo general deformable, etc.
- ***Vectores deslizantes*** que representan magnitudes vectoriales cuyos efectos o propiedades características no se modifican aunque (a veces entre ciertos límites) se desplacen sobre la recta que contiene cada una de ellos (recta de acción) y han de entenderse como herramienta metodológica de trabajo ya que conllevan por lo general idealizaciones o hipótesis simplificadoras. Ejemplos físicos: las fuerzas sobre un sólido rígido y, en general, aquellos vectores cuyo momento respecto a los diversos puntos define un campo vectorial de significado físico, como ocurre con los vectores velocidad angular, que se suponen situados sobre el eje de giro y aplicados en cualquier punto de éste y cuyos momentos respecto a los puntos del espacio definen las velocidades de estos.
- ***Vectores libres*** que son aquellos que pueden suponerse aplicados en cualquier punto del espacio y por su abstracción pueden considerarse más una herramienta matemática que física. Ejemplos: la resultante de un sistema de vectores deslizantes; el momento de un par de fuerzas o la velocidad de los puntos de un sólido rígido animado de un movimiento de traslación.

En este sentido, dos vectores con la misma dirección, el mismo sentido y el mismo módulo podrán considerarse iguales ... :

- *independientemente de su recta de acción solo cuando representen vectores libres.*
- *independientemente de su punto de aplicación en una misma recta de acción cuando se consideren deslizantes.*
- *solamente si tienen el mismo punto de aplicación cuando se consideren ligados, aún representando magnitudes de distinta naturaleza (por ejemplo, fuerza-causa $\vec{F} = m\vec{E}$ frente a fuerza-efecto $\vec{F} = m\vec{a}$).*

En base a su definición, un vector se podrá representar simbólicamente mediante una letra con una flecha encima (por ejemplo $\vec{a}$) o mediante letras indicativas de los puntos origen O y extremo P del vector (por ejemplo $\vec{OP}$) si bien esto último suele ir ligado a la idea de desplazamiento o se utiliza en procedimientos gráficos mientras que con una sola letra se suele aludir a la magnitud física en sí. También puede encontrarse ocasionalmente, por dificultades tipográficas o de dibujo, el uso de "negritas" **a** como notación vectorial.

1.3 PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN ESCALAR.

Se denomina vector unitario $\vec{u}$ a un vector de módulo unidad. Un vector con la misma dirección y sentido, de módulo a, se representa:

$$\vec{a} = a\,\vec{u} \qquad [1.1]$$

Inversamente, el vector unitario según la dirección del vector $\vec{a}$ se representará por:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{a} \qquad [1.2]$$

En consecuencia, teniendo en cuenta la *[1.1]*, el resultado de multiplicar un vector $\vec{a}$ por un número (escalar) b es otro vector $\vec{c}$ de la misma dirección, cuyo módulo es el valor absoluto del producto del módulo del vector dado por dicho número y cuyo sentido no se altera si el número es positivo, siendo opuesto si el número es negativo, expresándose en la forma:

$$\vec{c} = b\,\vec{a} = (b \cdot a)\,\vec{u} = c\,\vec{u} \qquad [1.3]$$

1.4 SUMA Y RESTA DE VECTORES. RESULTANTE.

Definiremos como ***suma de dos vectores*** un nuevo vector con origen el origen del primero y extremo el extremo del segundo, supuesto aplicado éste en el extremo del anterior. Esta definición nos permite precisar:

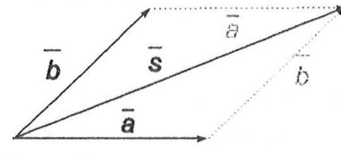


Figura 1.1

- *que el módulo del vector suma NO será, salvo en casos particulares de vectores paralelos, la suma de los módulos de los vectores sumandos;*
- *que, obviamente, el orden de vectores no altera el resultado, deduciéndose de una simple consideración gráfica, que la suma de vectores cumple la propiedad conmutativa ya que lo que cuenta es la posición relativa entre el punto origen y el punto final.*

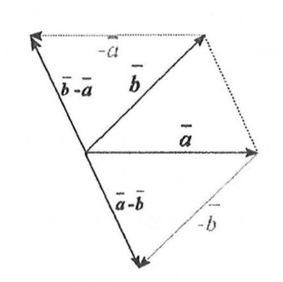
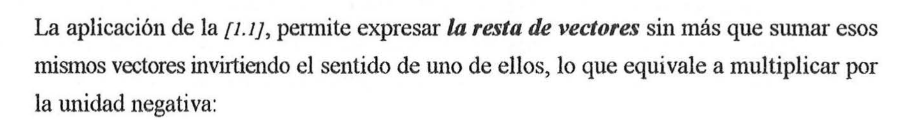


Figura 1.2

La aplicación de la *[1.1]*, permite expresar ***la resta de vectores*** sin más que sumar esos mismos vectores invirtiendo el sentido de uno de ellos, lo que equivale a multiplicar por la unidad negativa:



$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} + (-1)\vec{b} \qquad [1.4]$$

que, como se observa en la figura, no cumple la propiedad conmutativa al ser:

$$\vec{a} - \vec{b} = -(\vec{b} - \vec{a}) \qquad [1.5]$$

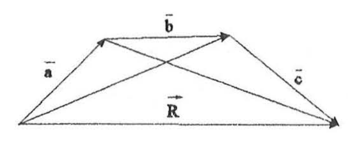


Figura 1.3

y en cualquier caso, lo que ambas cumplen para más de dos vectores es la propiedad asociativa sin necesitar demostración, siendo el vector resultante:

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \ldots = \vec{b} + \vec{c} + \vec{a} \ldots = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \ldots = \ldots \qquad [1.6]$$

Ahora bien, no siempre tendrá el mismo significado el vector resultante ya que sería preciso indicar al menos un punto de aplicación, por lo que distinguiremos según se trate de:

- **vectores libres** que, independientemente del punto de aplicación de cada vector, se suman por la conocida regla del polígono, situando, en cualquier orden, el punto de aplicación de cada uno en el extremo del anterior, siendo entonces su suma o resultante otro vector libre que no precisa, por ser simbólico, un punto de aplicación.
- En el caso de **vectores deslizantes**, su punto de aplicación estará sometido a restricciones como veremos en el tema siguiente. Por esta razón definiremos su resultante, en principio, como el vector suma de vectores equipolentes a los dados (se llama vector equipolente de otro a un vector de igual módulo, dirección y sentido cuyo punto de aplicación es distinto) que se obtiene, como en el caso anterior, por la regla del polígono, pero su punto de aplicación estará ligado a una condición adicional.
- En el caso de **vectores ligados** sólo tiene sentido físico la resultante cuando dichos vectores tienen común su punto de aplicación, obteniéndose, una vez más, mediante la regla del polígono que resulta, por tanto, en todos los casos, característica de la adición.

1.5 PRODUCTO ESCALAR Y VECTORIAL.

- Dados dos vectores libres o aplicados en un mismo punto, se denomina ***PRODUCTO ESCALAR*** de los mismos al número que resulta de multiplicar el módulo de uno por el del otro y por el coseno del ángulo que forman, que equivale a multiplicar el módulo de uno por la proyección del otro sobre él.

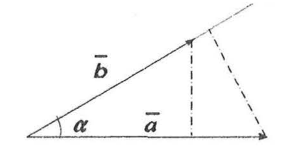


Figura 1.4

El producto escalar se indicará mediante un punto entre ambos vectores, pudiéndose establecer la expresión matemática del producto de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, si α es el ángulo que forman entre sí, en la forma:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a\ b\ \cos\alpha \qquad [1.7]$$

✓ Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen la misma dirección y sentido $\vec{a} \cdot \vec{b} = a\,b$

✓ Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares entre sí: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

- Se denomina ***PRODUCTO VECTORIAL*** de dos vectores, situados sobre rectas que se cortan o libres, a un nuevo vector cuyo módulo es igual al producto de los módulos de los vectores factores multiplicado por el seno del ángulo que forman; cuya dirección es normal al plano que definen y cuyo sentido se determina *(fig. 1.5)* mediante la regla del "tornillo" o "sacacorchos", como el de avance de un tornillo cuya cabeza, situada en el plano de los dos vectores, gira del primero al segundo. En otras palabras, los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, y el vector $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ (léase $\vec{c}$ igual al producto vectorial de $\vec{a}$ por $\vec{b}$) forman un sistema positivo o levógiro.

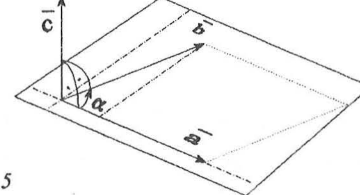


Figura 1.5

Siendo $\vec{u}$ un vector unitario normal al plano de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, con el sentido convenido, se expresará:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = a\ b\ sen\ \alpha\ \vec{u} \qquad [1.8]$$

pudiéndose deducir fácilmente que el módulo de $\vec{c}$ es el área del paralelogramo construido sobre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

✓ Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos: $\vec{a} \times \vec{b} = 0$

✓ Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares: $\vec{a} \times \vec{b} = a\ b\ \vec{u}$ donde $\vec{u}$ es un vector unitario, normal al plano que contiene los vectores, con el sentido convenido.

Evidentemente $sen\,\alpha = -sen(-\alpha)$ por lo que no cumple la propiedad conmutativa el producto vectorial:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \qquad [1.9]$$

1.6 PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES VECTORIALES DEFINIDAS

a) **Suma y resta de vectores**

conmutativa $\quad \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \vec{d} = \vec{a} - \vec{d} + \vec{c} + \vec{b}$

asociativa $\quad \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

b) **Producto por un escalar**

distributiva $\quad p\,\vec{a} + q\,\vec{a} = (p + q)\,\vec{a}$

distributiva $\quad p\,\vec{a} + p\,\vec{b} = p\,(\vec{a} + \vec{b})$

asociativa $\quad p\,(q\,\vec{a}) = (p\,q)\,\vec{a}$

c) **Producto escalar**

conmutativa $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

distributiva $\quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

asociativa $\quad p\,(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (p\,\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (p\,\vec{b})$

d) **Producto vectorial**

No conmutativa $\quad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

distributiva $\quad \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

asociativa $\quad p\,(\vec{a} \times \vec{b}) = (p\,\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (p\,\vec{b})$

Todas las propiedades indicadas se deducen inmediatamente de las definiciones respectivas, salvo la distributiva del producto vectorial, objeto de demostración al final del capítulo. También se demostrará la distributiva del producto escalar, a pesar de su sencillez.

1.7 REPRESENTACIÓN CARTESIANA

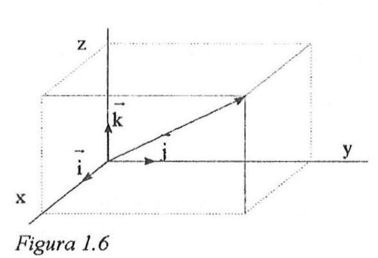


Figura 1.6

La representación cartesiana de un vector $\vec{v}$ se obtiene considerándole como suma de tres vectores sobre los ejes cartesianos que tienen por módulo las proyecciones sobre los mismos del vector. Si $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ son los vectores unitarios sobre los ejes ox, oy, oz, respectivamente *(fig. 1.6)*, se podrá escribir, en virtud de *[1.1]* y *[1.6, 2.6]*:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \qquad [1.10]$$

Una notación alternativa, cuya utilidad, al proporcionar fórmulas más compactas, se pone de relieve especialmente en el cálculo tensorial, se obtiene mediante la utilización de subíndices para los tres ejes denominando, p.ej., ox_1 ox_2 ox_3 a los ejes coordenados, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ a los unitarios sobre los mismos y v_1 v_2 v_3 a las proyecciones del vector $\vec{v}$. Entonces, la *[1.9]* se escribirá:

$$\vec{v} = v_1\vec{u}_1 + v_2\vec{u}_2 + v_3\vec{u}_3 = \sum_{i=1}^{3} v_i\,\vec{u}_i \qquad [1.11]$$

Esto permite la utilización del cómodo convenio de Einstein o "*convenio del subíndice repetido*", según el cual la repetición de un subíndice significa suma sobre el mismo, suprimiéndose así el signo sumatorio. La anterior quedaría en la forma: $\vec{v} = v_i\,\vec{u}_i$.

1.8 VECTOR DE POSICIÓN DE UN PUNTO

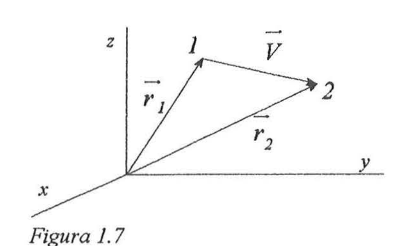


Figura 1.7

Es el vector que tiene por origen un punto O del espacio geométrico, que se toma como origen o referencia, y por extremo el punto P cuya posición especifica el vector. Se designa generalmente con la letra **r** y si el punto O es origen de un sistema de coordenadas cartesianas ox, oy, oz las componentes de $\vec{r}$ no son otra cosa que las coordenadas del punto P. Es decir:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad [1.12]$$

Según esto, el vector definido por dos puntos, $P_1(x_1\ y_1\ z_1)$ y $P_2(x_2\ y_2\ z_2)$, origen y extremo del mismo respectivamente *(fig.1.7)*, será: $\vec{v} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$

1.9 EXPRESIONES VECTORIALES EN CARTESIANAS

a) **Suma y resta de vectores**

Tanto por la propiedad asociativa, respecto a la suma del producto de escalares por un vector, como por simples consideraciones geométricas, dados los vectores:

$$\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$$
$$\vec{b} = b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k}$$
$$\vec{c} = c_x\,\vec{i} + c_y\,\vec{j} + c_z\,\vec{k}$$

el vector $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ se escribirá:

$$\vec{d} = (a_x + b_x - c_x)\,\vec{i} + (a_y + b_y - c_y)\vec{j} + (a_z + b_z - c_z)\,\vec{k} \qquad [1.13]$$

Este caso particular define, evidentemente, una regla general.

b) **Producto escalar**

Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, el uso de la propiedad distributiva para dicho producto nos permite escribir:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_xb_x(\vec{i}\cdot\vec{i}) + a_yb_y(\vec{j}\cdot\vec{j}) + a_zb_z(\vec{k}\cdot\vec{k}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \qquad [1.14]$$

pues al ser los vectores $\vec{i}$ $\vec{j}$ $\vec{k}$ unitarios y perpendiculares entre sí: $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$ y $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$

El producto escalar de un vector por sí mismo será: $\vec{a}\cdot\vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2$ cuya raíz cuadrada coincide con el módulo del vector.

c) **Producto vectorial**

De modo análogo y también por la propiedad distributiva del producto vectorial se obtiene, en función de las componentes cartesianas, la expresión del producto vectorial:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (\, a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\,) \times (\, b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\,) =$$

$$= a_x b_x(\vec{i} \times \vec{i}\,) + a_x\, b_y(\,\vec{i} \times \vec{j}\,) + a_x\, b_z(\,\vec{i} \times \vec{k}\,) +$$

$$+ a_y b_x(\vec{j} \times \vec{i}\,) + a_y\, b_y(\,\vec{j} \times \vec{j}\,) + a_y\, b_z(\,\vec{j} \times \vec{k}\,) +$$

$$+ a_z b_x(\vec{k} \times \vec{i}\,) + a_z\, b_y(\,\vec{k} \times \vec{j}\,) + a_z\, b_z(\,\vec{k} \times \vec{k}\,) =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\,\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\vec{k}$$

donde se ha hecho uso de las igualdades:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = -\,\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k} \qquad \vec{j} \times \vec{k} = -\,\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i} \qquad \vec{k} \times \vec{i} = -\,\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}$$

pudiendo escribirse el resultado obtenido en forma de determinante:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad [1.15]$$

d) **Producto mixto**

Se comprueba inmediatamente que el llamado producto mixto de tres vectores:

$$\vec{a} \cdot (\,\vec{b} \times \vec{c}\,) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad [1.16]$$

es igual, en valor absoluto, al volumen del paralelepípedo construido sobre ellos ya que $\vec{b} \times \vec{c}$ tiene por módulo el área del paralelogramo construido sobre $\vec{b}$ y $\vec{c}$ y es normal al plano formado por dichos vectores, siendo la proyección de $\vec{a}$ sobre él precisamente la altura del paralelepípedo; luego el valor resultante (escalar) es el producto del área de la base por la altura. Se entiende, en consecuencia, que:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad \textit{ya que} \quad \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad [1.17]$$

e) **Doble producto vectorial**

Asimismo, puede demostrarse que el llamado doble producto vectorial $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ puede escribirse en la forma:

$$\vec{a} \times (\,\vec{b} \times \vec{c}\,) = \vec{b}\,(\,\vec{c} \cdot \vec{a}\,) - \vec{c}\,(\,\vec{a} \cdot \vec{b}\,) = \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{c} \cdot \vec{a} \end{vmatrix} \qquad [1.18]$$

de gran importancia práctica como se demostrará más adelante.

2. VECTORES DESLIZANTES

2.1 VECTORES APLICADOS Y DESLIZANTES

De las definiciones dadas en el capítulo anterior para vectores aplicados o ligados (a un punto) y vectores deslizantes podríamos concluir que un vector aplicado equivale a un vector deslizante al que se le añade una condición más; es decir, que cualquier propiedad que necesariamente haya de cumplir una magnitud física expresable como vector deslizante, la cumpliría igualmente de tratarse de una magnitud vectorial aplicada, aunque en tal caso el cumplimiento de la propiedad en cuestión sea condición necesaria pero no suficiente, como veremos más adelante, en base a esa condición "más". Así, por ejemplo, utilizaremos la teoría de vectores deslizantes cuando no haya sospecha de que un sólido pueda dejar de ser rígido, en cuyo caso habría que fijar además alguna condición que expresara la posible deformación.

Aunque las magnitudes vectoriales serán por lo general aplicadas, dada la utilidad de la teoría de vectores deslizantes resultará más accesible el planteamiento inicial del estudio como si fueran deslizantes y posteriormente contrastar qué ocurriría si se dejaran de comportarse como tales para imponerles la correspondiente condición. Y la base de toda la teoría de vectores deslizantes está precisamente en la definición de Momento de un vector.

2.2 PROPIEDADES DE UN VECTOR DESLIZANTE

2.2.1 MOMENTO RESPECTO DE UN PUNTO

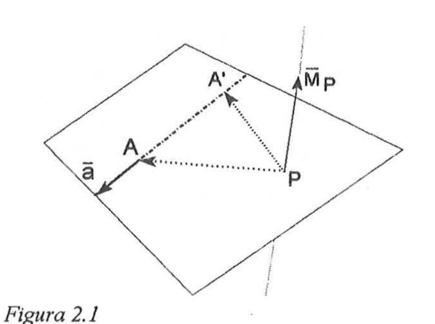


Figura 2.1

Dados un punto P y un vector $\vec{a}$ aplicado en un punto A, se denomina ***momento del vector $\vec{a}$ respecto al punto P***, considerando el segmento PA como un vector con origen en P y extremo en A, al vector $\vec{M}_P$ resultante de realizar el producto vectorial de dicho vector por $\vec{a}$:

$$\vec{M}_P = \vec{PA} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{AP} \qquad [2.1]$$

que será un vector "***aplicado***" en P, perpendicular al plano que contiene al punto y al vector $\vec{a}$ y de sentido definido por el de la operación vectorial.

Esta magnitud se define así porque responde bien al comportamiento físico de ciertos fenómenos que vamos a estudiar y, por tanto, la primera comprobación que haremos será si nos va a permitir hacer uso de las propiedades simplificadoras de los sistemas de vectores deslizantes. En efecto, el valor de $\vec{M}_P$ no varía si, en lugar de encontrarse el vector $\vec{a}$ aplicado en A, lo está en cualquier otro punto A' de su recta de acción, ya que: a) la dirección del momento siempre sería la de la normal al plano determinado por dicha recta y el punto P; b) el módulo tampoco se altera porque el área del paralelogramo construido sobre los vectores $\vec{PA}$ y $\vec{a}$ coincide, evidentemente, con el área del paralelogramo construido sobre $\vec{PA'}$ y $\vec{a}$; y finalmente porque c) el sentido "de giro" solo podría invertirse cambiando el sentido de $\vec{a}$.

En cualquier caso, se puede comprobar haciendo uso de la propia definición:

$$\vec{M}_P = \vec{PA'} \times \vec{a} = (\vec{PA} + \vec{AA'}) \times \vec{a} = \vec{PA} \times \vec{a} + \vec{AA'} \times \vec{a} = \vec{PA} \times \vec{a} \qquad [2.2]$$

ya que $\vec{AA'}$ y $\vec{a}$ tienen la misma dirección y, por tanto, es nulo su producto vectorial. En consecuencia, aunque la definición de momento de un vector respecto a un punto será de especial relevancia para vectores deslizantes, podrá también aplicarse a vectores ligados, ya que ello no va a afectar en el resultado final. La diferencia estará en que tratándose de vectores deslizantes "dará" igual, mientras que los vectores aplicados se comportarán "como si diera" igual.

El momento respecto a cualquier otro punto Q del espacio se podrá relacionar con el anterior de forma análoga ya que: $\vec{M}_Q = \vec{QA} \times \vec{a} = (\vec{QP} + \vec{PA}) \times \vec{a} = \vec{QP} \times \vec{a} + \vec{PA} \times \vec{a} = \vec{M}_P + \vec{QP} \times \vec{a}$ resumiéndose en la expresión:

$$\vec{M}_Q = \vec{M}_P + \vec{QP} \times \vec{a} \qquad [2.3]$$

que denominaremos *de paso de momentos* y que podría interpretarse como si pudiéramos trasladar el vector deslizante, como si fuera libre, a cualquier otro punto P fuera de su recta de acción, sin variar sus efectos, siempre y cuando vaya acompañado en el cambio del momento en dicho punto de referencia.

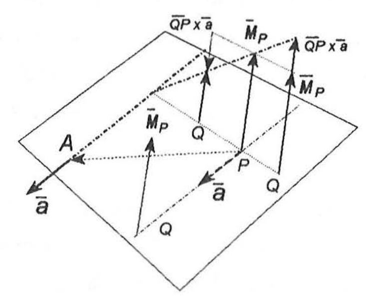


Figura 2.2

Por otro lado, la expresión obtenida nos da una idea de la distribución del campo de momentos originado por el vector $\vec{a}$ ya que a cada punto del espacio le corresponderá un único momento que, en principio, será diferente para cada punto del espacio. Solo serán iguales cuando $\vec{QP} \times \vec{a} = 0$ lo que, dejando aparte soluciones triviales, ocurrirá cuando $\vec{QP} \,//\, \vec{a}$; es decir, para todos los puntos de rectas paralelas a la recta de acción de $\vec{a}$. En otras palabras, hemos obtenido una distribución circular de momentos en el espacio, según planos perpendiculares a la recta de acción del vector, siendo obviamente nulo el momento en los puntos de dicha recta.

Esta característica nos permite, conocido el vector $\vec{a}$ y su momento $\vec{M}_P$ en un punto cualquiera P , encontrar su recta de acción, quedando así totalmente definido. No ocurriría lo mismo, sin embargo, de tratarse de un vector aplicado, ya que necesitaríamos conocer "alguna condición más".

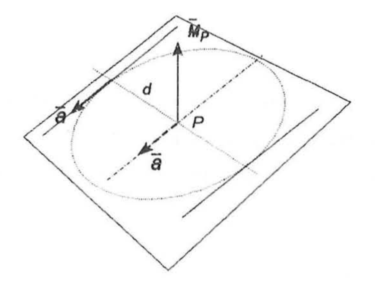


Figura 2.3

En efecto, comprobado que el momento de un vector respecto de un punto no se altera al desplazarse dicho vector sobre la recta que le contiene (línea o recta de acción), resulta una magnitud adecuada para, conocido el vector, determinar dicha recta. Al conocer $\vec{M}_{pP}$, sabremos que aquélla habrá de encontrarse en el plano normal a $\vec{M}_P$ por P, será paralela al vector $\vec{a}$ y a tal distancia ***d*** de P que el módulo de $\vec{M}_P$ sea el correcto, indicándonos el sentido de este vector cuál de las dos rectas posibles es la que contiene el vector $\vec{a}$.

2.2.2 Coordenadas de un Vector Deslizante

Podemos, pues, decir que un vector deslizante queda completamente definido por el conocimiento del vector y del momento respecto a un punto cualquiera del espacio y no solo por el vector y un punto de su recta de acción. En cualquier caso, utilizando la notación cartesiana podremos decir que está determinado mediante el conocimiento, en principio, de seis **COORDENADAS**: por ejemplo, las tres necesarias para definir el vector como libre y las otras tres de las componentes del momento en un punto cualquiera o de las coordenadas de un punto de la recta de acción.

Sin embargo, ya que el vector y su momento están ligados por la relación $\vec{M} \cdot \vec{a} = 0$, pues se trata de vectores ortogonales entre sí, bastaría exclusivamente con el conocimiento de cinco coordenadas ya que la sexta se obtendría de dicha condición.

Análogamente, aunque resulta menos inmediato, bastaría conocer solamente dos de las tres coordenadas de un punto de la recta de acción ya que como vector deslizante podría aplicarse en todos y cada uno de los puntos que forman dicha recta. Su justificación consiste en proporcionar tan solo esas dos coordenadas precisamente del punto P de la recta tal que $\vec{OP} \perp \vec{a}$ de forma que la tercera se obtendría de $\vec{OP} \cdot \vec{a} = 0$.

2.2.3 MOMENTO DE UN VECTOR RESPECTO DE UNA RECTA

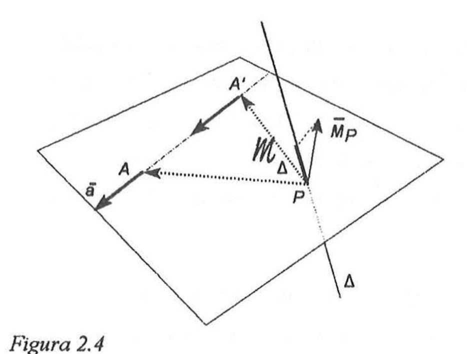


Figura 2.4

Se denomina ***Momento de un vector deslizante respecto a una recta -o*** *Momento áxico-* a la proyección sobre la recta del momento resultante respecto a uno cualquiera de sus puntos ya que comprobaremos que esta proyección no va a depender del punto elegido sobre ella. Puede expresarse, por tanto, mediante el producto escalar:

$$m_\Delta = \vec{M}_P \cdot \vec{u} \qquad [2.4]$$

y aunque se trata de un escalar, su valor tendrá signo positivo o negativo, en función del sentido del unitario de la recta adoptado.

Denominemos $\vec{a}$ el vector considerado, siendo A un punto de su recta de acción, y definamos la recta mediante un vector unitario $\vec{u}$, aplicado en un punto P cualquiera de la misma. El momento respecto a la recta se obtendrá proyectando el momento respecto a P sobre la recta, siendo pues su valor el escalar:

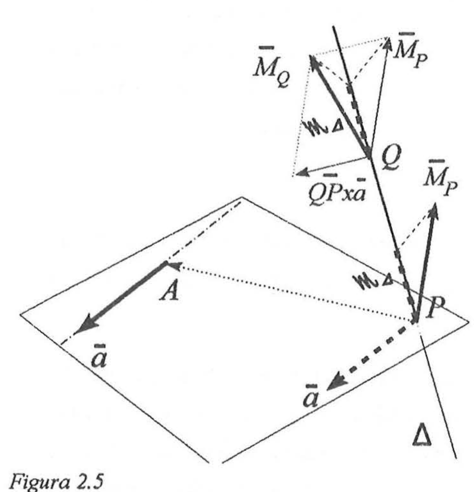


Figura 2.5

$$m_\Delta = (\vec{PA} \times \vec{a}) \cdot \vec{u}$$

Si eligiésemos otro punto Q de la recta para obtener el momento áxico, proyectado sobre la recta el vector momento en Q, valdría $m'_\Delta = (\vec{QA} \times \vec{a}) \cdot \vec{u}$ siendo preciso demostrar que $m_\Delta = m'_\Delta$, lo que se consigue en el acto considerando $\vec{QA}'$ como suma de los vectores $\vec{QP}$ y $\vec{PA}'$ y teniendo presente que el vector $\vec{QP} \times \vec{a}$ es normal a la recta por estar $\vec{QP}'$ contenido en ella, resultando nulo su producto escalar por $\vec{u}$, es decir:

$$m'_\Delta = (\vec{QA} \times \vec{a}) \cdot \vec{u} = [(\vec{QP} + \vec{PA}) \times \vec{a}] \cdot \vec{u} = [\vec{QP} \times \vec{a} + \vec{PA} \times \vec{a}] \cdot \vec{u} = (\vec{PA} \times \vec{a}) \cdot \vec{u} = m_\Delta$$

En consecuencia, al ser independiente del punto que se tome sobre la recta, adquiere plenamente sentido el concepto de "*momento áxico*" de un vector.

Esta propiedad de equiproyección, por la cual los momentos originados por los vectores deslizantes, en dos puntos cualesquiera del espacio, proyectan magnitudes iguales "*e igualmente orientadas*" sobre la recta que los une, es una de las características principales de los campos de momentos, que denominaremos EQUIPROYECTIVOS, y va a caracterizar determinados sistemas como el campo de velocidades de los puntos de un sólido rígido.

2.2.4 RECTAS DE MOMENTO NULO.

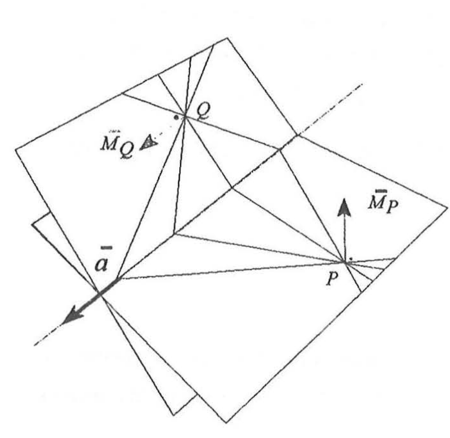
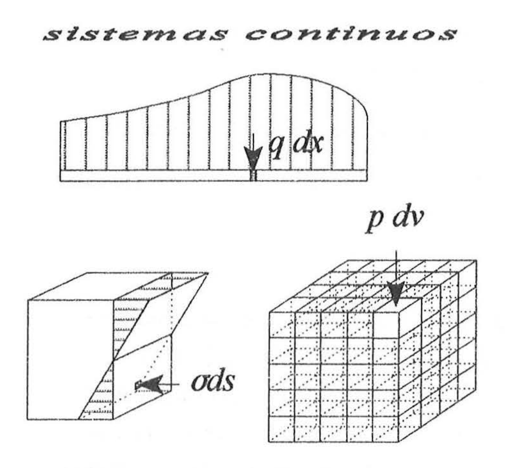


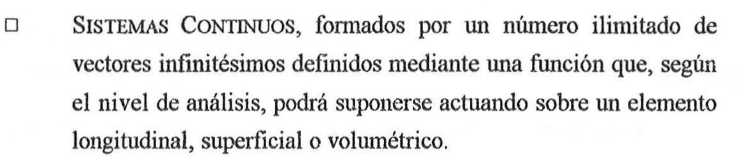
Figura 2.6

Caso particular serán las rectas cuyo momento áxico sea nulo, no necesariamente porque sean nulos los momentos en todos sus puntos (aunque sería suficiente), sino porque sean ortogonales a ellas. Para un único vector su propia recta soporte será RECTA DE MOMENTO NULO, ya que no puede dar momento respecto a sus puntos, a diferencia de los sistemas de vectores en los que, como veremos, esto no ocurrirá salvo en casos particulares que llamarán precisamente nuestra atención. Obviamente, por la propiedad de equiproyectividad, si una recta es DE MOMENTO NULO, lo serán también todas aquellas que la corten y estén contenidas en el plano perpendicular al momento en el punto de corte. Esto conduce siempre a las rectas contenidas en el haz de planos cuya directriz es la recta soporte del vector.

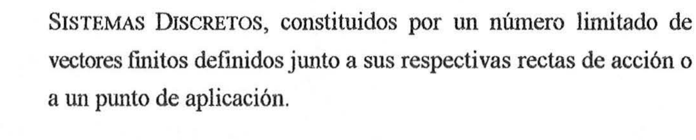
2.3 SISTEMAS DE VECTORES DESLIZANTES

Aunque en algunos casos podremos idealizar el fenómeno real mediante un único vector (estacionario o variable como veremos en su momento), por lo general nos vamos a encontrar con manifestaciones simultáneas, expresables vectorialmente, que nos interesará reducir a otras más simplificadas (siempre que la naturaleza del problema lo permita) o, por el contrario, descomponer una simple en determinadas direcciones que nos faciliten la labor. Es decir, nos vamos a encontrar con un sistema de vectores actuando simultáneamente que, en una primera aproximación podremos distinguir, según su naturaleza, en:




□ SISTEMAS CONTINUOS, formados por un número ilimitado de vectores infinitésimos definidos mediante una función que, según el nivel de análisis, podrá suponerse actuando sobre un elemento longitudinal, superficial o volumétrico.

Sirven para idealizar la acción sobre un sólido de otro sólido (cargas estructurales, acciones del terreno, acciones internas...) o fluido (agua, nieve, viento...) e incluso la propia acción de la gravedad terrestre y por lo general se representan como vectores paralelos aplicados, de los que trataremos más adelante.


□ SISTEMAS DISCRETOS, constituidos por un número limitado de vectores finitos definidos junto a sus respectivas rectas de acción o a un punto de aplicación.

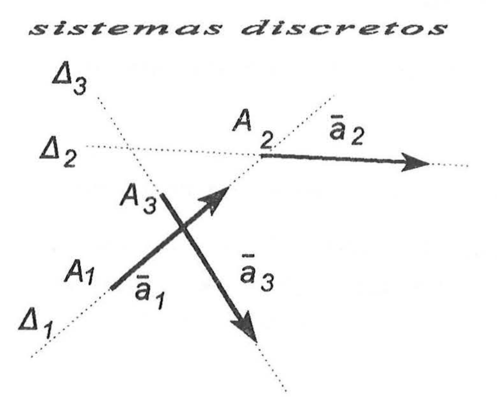


Figura 2.7

Representan más bien una abstracción de la realidad ya que son mucho más numerosos los continuos, aunque en su momento los traduciremos a discretos, por extensión a suma indefinida o integral, con objeto de elaborar una teoría que nos permita, cuando los vectores representen fuerzas, relacionarlas con el movimiento que seguirán o tenderían a seguir, si pudieran, los sólidos rígidos o con las posibles deformaciones originadas por la limitación de dichos movimientos.

2.3.1 RESULTANTE DEL SISTEMA.

En cualquier caso, hasta ahora no hemos encontrado diferencias entre el campo de momentos de vectores deslizantes y ligados. Es al enfrentarnos con un sistema de vectores $S\,[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_n, A_1, A_2, \dots A_n]$, cuando surge el primer conflicto pues no tenemos herramientas para sumar vectores que no sean concurrentes o tengan el mismo punto de aplicación.

Como mucho podremos denominar ***Resultante del Sistema*** al vector obtenido sumando los vectores equipolentes a los vectores del sistema, llevados a un mismo punto de aplicación:

$$\vec{R} = \Sigma\, \vec{a}_i \qquad [2.5]$$

pero, por el momento, este vector será un vector libre ya que su posición en el espacio no queda definida exclusivamente con la suma de los vectores, y para representar al sistema tendrá que producir los mismos "*efectos*" que él, es decir, los mismos momentos en cualquier punto del espacio que el sistema equivalente.

2.3.2 MOMENTO RESULTANTE RESPECTO A UN PUNTO.

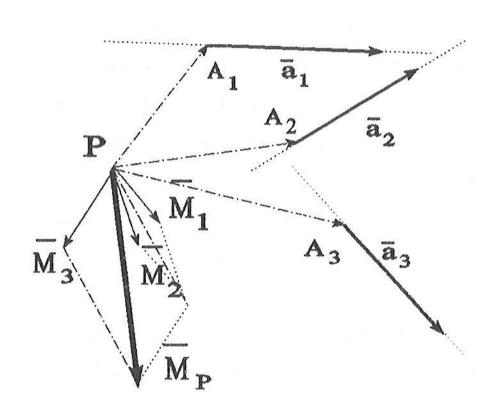


Figura 2.8

Dicho conflicto no existe, sin embargo, si solamente tratamos de sumar los momentos de cada vector del sistema respecto a un mismo punto del espacio, dado que se trata de magnitudes vectoriales con los mismos puntos de aplicación.

En efecto, dado un sistema de vectores deslizantes $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2 \ldots \vec{a}_n$ se denomina **MOMENTO RESULTANTE** del sistema respecto a un punto P, al resultado de sumar los momentos, respecto a dicho punto, de los vectores del sistema (fig.2.8):

$$\vec{M}_P = \Sigma\, \vec{M}_P^{(i} = \Sigma\, \vec{PA}_i \times \vec{a}_i \qquad [2.6]$$

aunque la expresión más significativa de la teoría de vectores deslizantes, por su constante aplicación, es la que relaciona los momentos resultantes entre dos puntos cualesquiera, de forma análoga al proceso seguido para un solo vector.

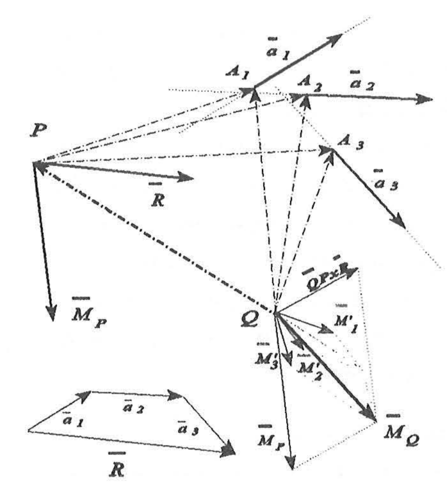


Figura 2.9

Denominando $\vec{PA}_i$ los vectores de posición respecto a P y $\vec{QA}_i$ los vectores de posición respecto a Q de los puntos elegidos arbitrariamente de las respectivas rectas de acción de los vectores del sistema (fig. 2.9), podemos expresar el momento resultante respecto a Q estableciendo la relación $\vec{QA}_i = \vec{QP} + \vec{PA}_i$ de forma que:

$$\vec{M}_Q = \Sigma\, \vec{QA}_i \times \vec{a}_i = \Sigma(\vec{QP} + \vec{PA}_i) \times \vec{a}_i = \vec{QP} \times \Sigma\, \vec{a}_i + \Sigma \vec{PA}_i \times \vec{a}_i = \vec{QP} \times \vec{R} + \vec{M}_P \qquad [2.7]$$

donde se ha sustituido la suma de los vectores por la **RESULTANTE** del sistema (distinto de sistema resultante) definida anteriormente.

En principio, a la vista de la expresión obtenida en [2.7] y a los únicos efectos de obtención del campo de momentos originado por el sistema, podría entenderse que *el vector resultante [2.5] aplicado en el punto respecto al que ya se ha calculado el momento del sistema, produce los mismos efectos que aquél*, es decir:

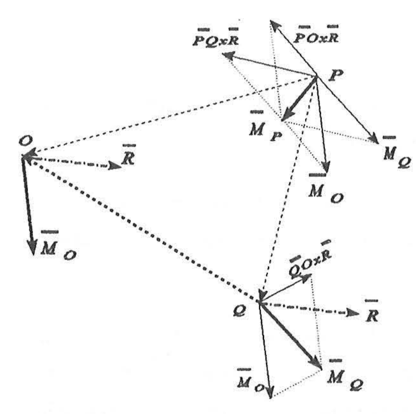


Figura 2.10

"para obtener el momento resultante de un sistema de vectores deslizantes respecto a un punto Q, conociendo su momento $\vec{M}_P$ respecto a otro punto arbitrario P, nos basta sumar a este último el momento respecto a Q de la Resultante del sistema, supuesta aplicada en el punto P".

Ello nos permitirá, en lo sucesivo, prescindir de los vectores del sistema y trabajar exclusivamente con $\vec{M}_P$ y $\vec{R}$ aplicada en P; es decir, con la REDUCCIÓN DEL SISTEMA A UN PUNTO CUALQUIERA del espacio, que será única para cada punto y sistema dado, si bien no será una relación biunívoca ya que no habrá sólo un sistema que dé la misma reducción o produzca el mismo campo de momentos y en ello nos basaremos a la hora de encontrar un sistema equivalente al dado.

A efectos operativos, por tanto, bastará conocer $\{\vec{M}_P, \vec{R}\}$ para tener completamente definido el campo de momentos del sistema de vectores deslizantes, aunque no sepamos cuántos lo formen ni sus respectivas rectas de acción. Si el punto elegido para reducir el sistema de vectores deslizantes lo consideramos a su vez como origen de coordenadas, las componentes de los vectores $\{\vec{M}_{PO}, \vec{R}\}$ se entenderán como COORDENADAS DEL SISTEMA, ya que no hará falta ningún dato más para su completa definición. También podrá definirse completamente un s.v.d. con el momento en tres puntos no alineados A, B y C:

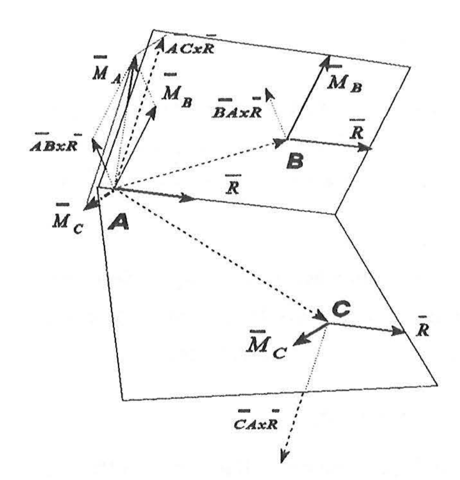


Figura 2.11

En efecto, el conocimiento de $\vec{M}_A$ y $\vec{M}_B$ sólo no basta ya que, por la ecuación de paso de momentos, $\vec{M}_A - \vec{M}_B = \vec{AB} \times \vec{R}$ pero, el hecho de conocer el vector resultante del producto vectorial de $\vec{AB}$ y $\vec{R}$, conocido $\vec{AB}$, no permite determinar $\vec{R}$ ya que son incógnitas su módulo y su dirección relativa a $\vec{AB}$: Conoceremos exclusivamente el plano en el que va a situarse (normal a $\vec{M}_A - \vec{M}_B = \vec{AB} \times \vec{R}$) pero no su dirección. Es necesario, por tanto, conocer el momento en un tercer punto no alineado con los anteriores para obtener otro plano distinto en el que también haya de encontrarse la resultante, para obtener su dirección de la intersección con el anterior. No obstante, estas reducciones podrán ser insuficientes cuando se trate de sistemas de vectores aplicados sobre un medio que no mantenga constante la posición relativa de los puntos de aplicación (como veremos para sólidos o sistemas deformables).

2.3.3 MOMENTO ÁXICO DE UN S.V.D. EQUIPROYECTIVIDAD.

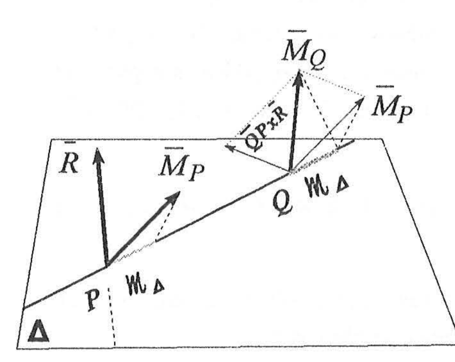


Figura 2.12

Por extensión a lo definido para un vector, el momento áxico o momento respecto a una recta de un sistema de vectores deslizantes es la proyección, sobre dicha recta, del momento resultante del sistema respecto a un punto de la misma y coincide, evidentemente, con la suma de las proyecciones de los momentos de cada uno de los vectores. En consecuencia, al ser cada uno de los sumandos independiente del punto elegido sobre el eje, la suma también lo será, permitiéndonos afirmar que las proyecciones de los vectores del campo de momentos del s.v.d., correspondientes a puntos de una misma recta, son iguales entre sí e igualmente orientadas, lo que constituye la propiedad de EQUIPROYECTIVIDAD, característica de estos campos.

En otras palabras, para que un campo vectorial pueda ser considerado como campo de momentos de un s.v.d., es necesario y suficiente que tal propiedad se cumpla (hemos comprobado que es necesaria; admitiremos sin demostración, por ser laboriosa, que es también suficiente).

2.3.4 RECTAS DE MOMENTO NULO. FOCO Y PLANO FOCAL.

Se denomina **RECTA DE MOMENTO NULO** a toda recta respecto a la cual el momento del sistema es nulo (sin serlo necesariamente el momento respecto a los puntos que la forman, aunque ello sería suficiente).

Y por lo visto anteriormente, si en un punto P cualquiera *(fig.2.13)* el momento resultante es $\vec{M}_P$, serán rectas de momento nulo todas las que, pasando por P, estén contenidas en el plano Π_P normal a $\vec{M}_P$ por P, que denominaremos **"plano focal"** del punto P, denominado, a su vez, **"foco"** del plano Π_P.

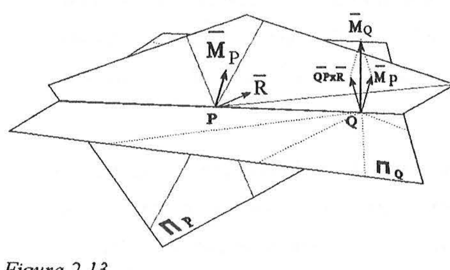


Figura 2.13

Si $\vec{M}_P$ es el momento resultante de un s.v.d. en un punto genérico P, su plano focal Π_P se obtiene unívocamente trazando el plano normal a $\vec{M}_P$ por P. El momento de otro punto cualquiera de este plano, Q, se obtendrá utilizando la expresión del cambio de momentos *[2.7]* y no será un vector normal al plano, salvo si $\vec{R}$ se encuentra en el mismo, constituyendo un caso particular de s.v.d. que veremos más adelante. Existe, pues, una correspondencia biunívoca entre los puntos (focos) y sus planos focales.

Se demuestra fácilmente que la relación entre los puntos y sus planos focales es biunívoca y que si un punto Q pertenece a Π_P, el punto P pertenece al plano focal de Q, Π_Q,. En consecuencia, a los puntos del plano Π_P corresponden los planos que pasan por P y viceversa. Se trata, pues, de una correspondencia de tipo involutivo que recuerda la polaridad en las cuádricas.

2.3.5 MOMENTO MÍNIMO DE UN S.V.D. EJE CENTRAL.

Volviendo al análisis de la expresión de paso de momentos *[2.7]* podemos observar que, independientemente del punto P de reducción del sistema, todos los puntos P' alineados con él paralelamente a la dirección de la resultante tienen el mismo momento que P dado que $\vec{PP}' \parallel \vec{R}$ y, por tanto, $\vec{PP}' \times \vec{R} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{M}_P = \vec{M}_P' + \vec{PP}' \times \vec{R} = \vec{M}_P'$. Podemos, por tanto, efectuar una aproximación para visualizar la distribución espacial del campo de momentos de un sistema genérico de vectores deslizantes *(fig.2.14)* limitándonos a estudiar un plano perpendicular a la dirección de la resultante, ya que todos los demás planos paralelos tendrán la misma distribución.

Otro dato a tener en cuenta es que la componente $\vec{QP} \times \vec{R}$ del momento en un punto Q del plano normal a la resultante estará siempre contenida en él por ser un vector perpendicular a $\vec{R}$ y, por tanto, la única componente de $\vec{M}_Q$ según la dirección de la resultante es la propia componente de $\vec{M}_P$ en dicha dirección. Esto equivale a admitir que todos los momentos del campo tienen en común la componente según la dirección de la resultante, diferenciándose únicamente por la componente contenida en el plano que, no obstante, estará siempre dirigida en el mismo sentido de "giro" en torno a $\vec{R}$. Por tanto, parece lícito pensar que existirá en el plano algún punto especial E respecto al cual el momento del sistema solo tenga componente según la dirección normal ya que la proyección de $\vec{M}_P$ sobre el plano se anulará con la componente $\vec{EP} \times \vec{R}$.

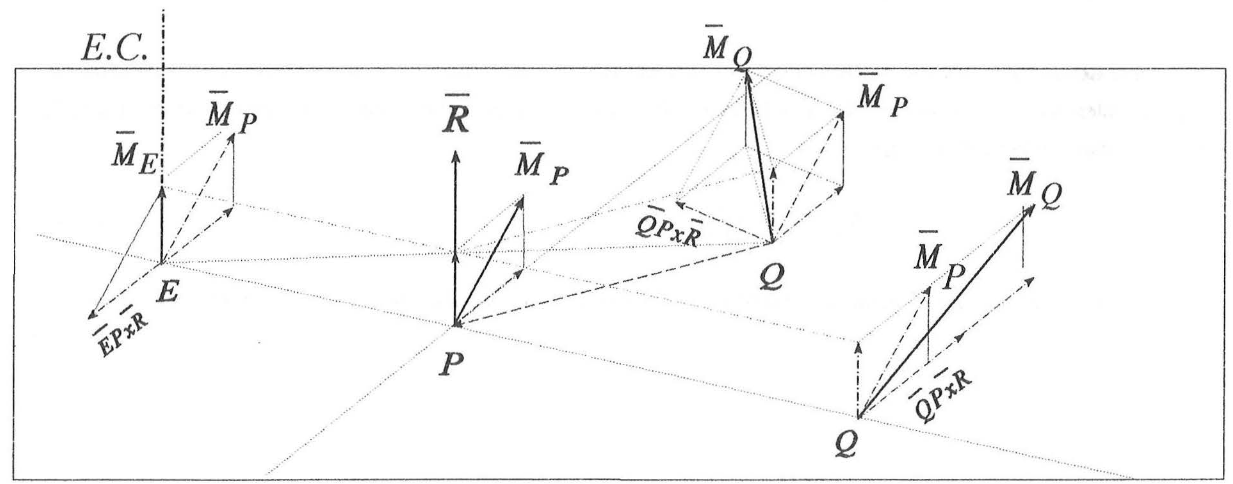


Figura 2.14

Ese punto, de **MOMENTO MÍNIMO**, tendrá que encontrarse en la dirección normal al plano formado por los vectores $\vec{R}$ y $\vec{M}_P$ trazada desde el punto P y, por la propiedad indicada anteriormente, tendrán el mismo momento todos los puntos contenidos en la recta perpendicular al plano por E. Esa recta, que recibe el nombre de **EJE CENTRAL**, se definirá, en consecuencia, como el lugar geométrico de los puntos respecto a los cuales el momento del sistema de vectores deslizantes es mínimo y su dirección coincidirá siempre con la de la resultante del sistema, ya que nos hemos basado en ella para realizar la construcción, pudiéndose encontrar la posición del punto E_o y la de todos los puntos E del eje en base a esta condición: $\vec{M}_E = \vec{M}_P + \vec{EP} \times \vec{R} \quad \parallel \quad \vec{R}$

$$\vec{M}_E \times \vec{R} = \vec{0} = \vec{M}_P \times \vec{R} + [\vec{EP} \times \vec{R}] \times \vec{R} \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_P \times \vec{R} = \vec{R} \times [\vec{EP} \times \vec{R}] = \vec{EP}(\vec{R} \cdot \vec{R}) - \vec{R}(\vec{R} \cdot \vec{EP}) = R^2 \vec{EP} - R\,\overline{EE_o}\,\vec{R}$$

y dividiendo ambos miembros por R^2 resulta: $\frac{\vec{M}_P \times \vec{R}}{R^2} = \vec{EP} - \vec{EE}_o = -\vec{PE}_o$ que nos da la ecuación vectorial del Eje Central:

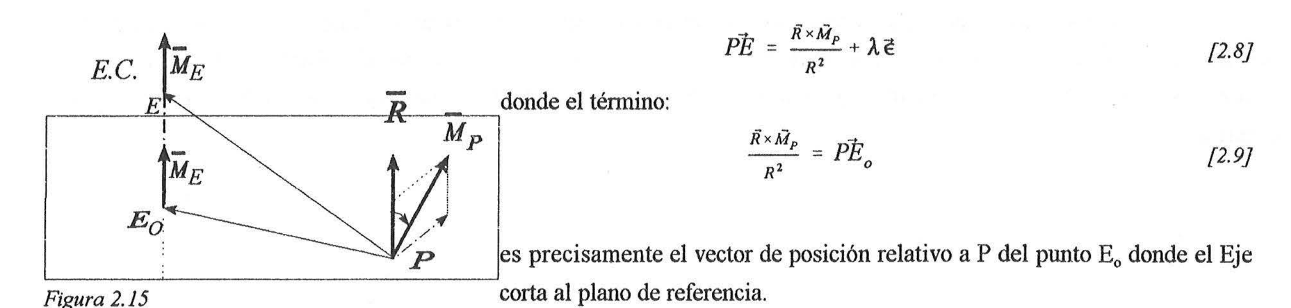


Figura 2.15

$$\vec{PE} = \frac{\vec{R}\times\vec{M}_P}{R^2} + \lambda\vec{\epsilon} \qquad [2.8]$$

donde el término:

$$\frac{\vec{R}\times\vec{M}_P}{R^2} = \vec{PE}_o \qquad [2.9]$$

es precisamente el vector de posición relativo a P del punto E_o donde el Eje corta al plano de referencia.

Dicho punto es, por otro lado, Foco del plano que será, a su vez, plano focal, de acuerdo con la definición dada en el epígrafe anterior, independientemente de que para cada punto del espacio siempre podremos encontrar un plano focal.

La expresión analítica del ***momento mínimo*** m no es otra que la proyección, sobre la dirección de la resultante, del momento en P:

$$m = \vec{M}_P \cdot \frac{\vec{R}}{R} = \frac{\vec{M}_P \cdot \vec{R}}{R} \qquad [2.10]$$

aunque su valor no varía si elegimos cualquier punto Q del espacio, ya que, como hemos podido observar gráficamente, todos tienen la misma componente según dicha dirección, como se comprueba haciendo uso de la ecuación de paso de momentos.

En efecto, multiplicando escalarmente ambos miembros de la *[2.7]* por $\vec{R}$, al ser $(\vec{QP}\times\vec{R})\cdot\vec{R} = 0$ por tratarse del producto escalar de dos vectores ortogonales entre sí, se obtiene:

$$\vec{M}_Q\cdot\vec{R} = [\vec{M}_P + \vec{QP}\times\vec{R}]\cdot\vec{R} = \vec{M}_P\cdot\vec{R} + [\vec{QP}\times\vec{R}]\cdot\vec{R} = \vec{M}_P\cdot\vec{R} = K \qquad [2.11]$$

valor constante denominado ***Automomento*** del sistema de vectores deslizantes que es un escalar "orientado" independiente del sistema de referencia y del punto de reducción. La expresión vectorial del momento respecto a los puntos del Eje Central, por su paralelismo con la resultante, será:

$$\vec{M}_E = \left(\vec{M}_P \cdot \frac{\vec{R}}{R}\right)\frac{\vec{R}}{R} = \frac{\vec{M}_P\cdot\vec{R}}{R^2}\vec{R} = \lambda\,\vec{R} \qquad [2.12]$$

donde el valor λ, con su signo, se ***denomina Característica del sistema***, constituyendo uno de los invariantes del mismo.

2.3.6 INVARIANTES DE UN S.V.D.

En este sentido se entenderá por **INVARIANTE** de un sistema de vectores deslizantes toda magnitud o valor que no cambie mientras los vectores del sistema no experimenten otras variaciones que deslizar sobre sus rectas de acción. Se comprende que haya de ser por fuerza una magnitud escalar, ya que las vectoriales dependen del sistema de referencia para su definición. Serán invariantes:

- El *Módulo de la Resultante, **R**.*
- El *Automomento* $\vec{M}_Q\cdot\vec{R} = \vec{M}_P\cdot\vec{R} = K$ del sistema.
- cualquier combinación lineal de ambos, como el momento mínimo $m = \frac{\vec{M}_P\cdot\vec{R}}{R^2}$ y $\lambda = \frac{\vec{M}_P\cdot\vec{R}}{R^2}$, característica del sistema

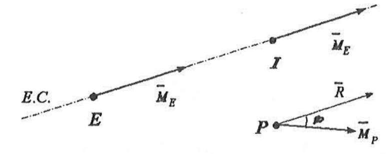


Figura 2.16

En efecto, la invariancia del Automomento prueba que la componente del momento resultante en la dirección de $\vec{R}$ también lo es y que, en consecuencia, el momento resultante será mínimo para aquellos puntos en que sea paralelo a la resultante dado que, si $\vec{M}\cdot\vec{R} = cte = |\vec{M}|\,|\vec{R}|\cos\varphi$, el momento será mínimo cuando $\cos\varphi=1$, es decir, cuando el ángulo que forme con $\vec{R}$ sea 0 o π.

La demostración de que no se trata de un solo punto sino de toda una recta, es inmediata si tratamos de averiguar, mediante la fórmula de paso de momentos *[2.7]*, el momento en un punto cualquiera de la dirección definida por la resultante: $\vec{M}_I = \vec{M}_E + \vec{IE} \times \vec{R} = \vec{M}_E$ al resultar nulo el segundo sumando por tratarse de un producto vectorial de vectores paralelos.

2.4 REDUCCIÓN AL EJE CENTRAL DEL S.V.D.

Como el Eje Central es, por definición, paralelo a la resultante, la elección de uno de sus puntos para reducir el sistema de vectores deslizantes presenta una enorme ventaja a la hora de conocer el campo de momentos originado por el sistema ya que podemos obtener el momento en cualquier punto como suma de dos vectores ortogonales entre sí: $\vec{M}_I$ y $\vec{PI} \times \vec{R}$ *(fig.2.17)* reflejo de la **DISTRIBUCIÓN HELICOIDAL** del campo de momentos en el caso más general.

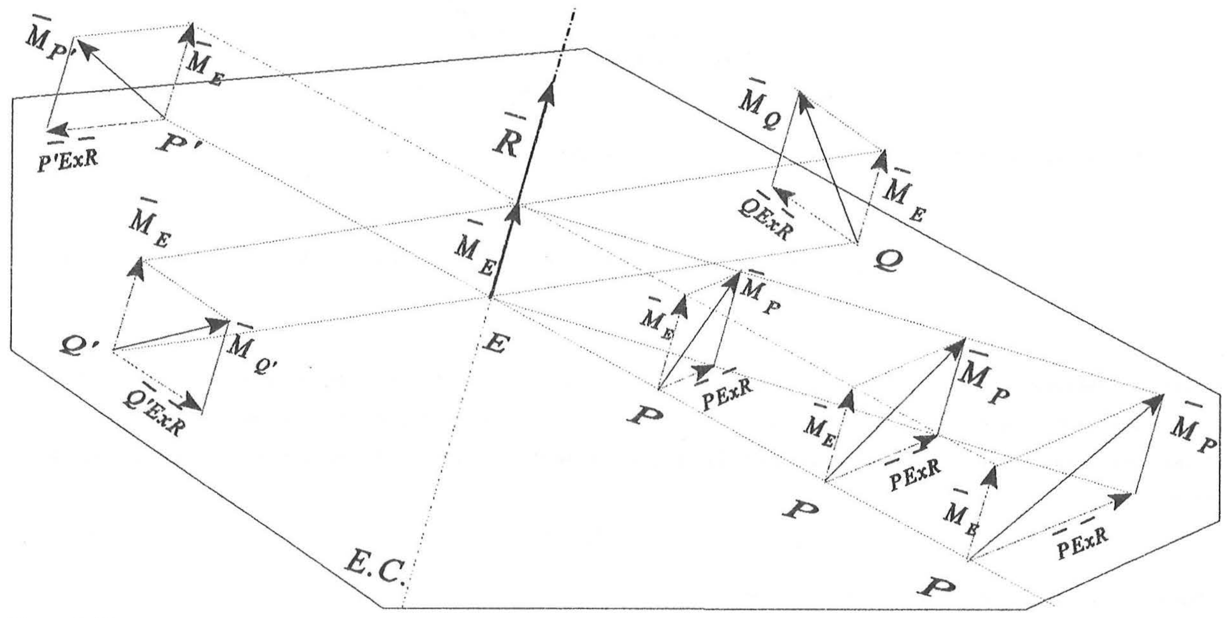


Figura 2.17

A diferencia de lo visto para un solo vector, en general el momento mínimo no siempre será nulo. Solo para los casos especiales, que veremos en su momento, el Automomento sea $\vec{M} \cdot \vec{R} = 0$. Esta característica nos permite establecer una clasificación de los sistemas de vectores deslizantes atendiendo en primer lugar al valor del Automomento y, en segundo lugar al de la resultante del sistema:

A) SISTEMAS GENERALES	$\vec{R} \cdot \vec{M} = k \neq 0$	$\vec{M}_I \neq 0$, $\vec{R} \neq 0$ ▷ $\vec{M}_A = \vec{M}_I + \vec{AI} \times \vec{R} \neq \vec{0}$ ▷ $\vec{M}_I \perp \vec{AI} \times \vec{R}$ CAMPO DE MOMENTOS HELICOIDAL
B) SISTEMAS ESPECIALES (DEGENERADOS)	$\vec{R} \cdot \vec{M} = 0$ $\vec{M}_P \neq 0$	$\vec{R} \neq 0$ ▷ $M_I = \frac{0}{R^2} = 0$ ▷ $\vec{M}_A = \vec{AI} \times \vec{R}$ CAMPO DE MOMENTOS CIRCULAR
		$\vec{R} = 0$ ▷ $M_I = \frac{0}{0}$: *Indeterminado* ▷ $\vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{AB} \times \vec{R} = \vec{M}_B \neq 0$ CAMPO DE MOMENTOS UNIFORME
C) SISTEMAS NULOS	$\vec{R} \cdot \vec{M} = 0$ $\vec{M} = 0$ $\vec{R} = 0$	$\vec{M}_A = \vec{M}_B = \vec{M}_C = 0$ CAMPO DE MOMENTOS NULO

2.5 EXPRESIONES CARTESIANAS

Hasta ahora hemos tratado los vectores deslizantes sin hacer referencia al sistema de referencia, por lo que lo anteriormente expuesto será válido sea cual sea el sistema de representación (coordenadas cartesianas, cilíndricas, etc). Tanto para establecer la notación a utilizar, como por la gran utilización del primero de los sistemas de coordenadas citados, nos va a convenir traducir a cartesianas las expresiones ya deducidas. Sean:

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= X_1\,\vec{i} + Y_1\,\vec{j} + Z_1\,\vec{k} \\ \vec{a}_2 &= X_2\,\vec{i} + Y_2\,\vec{j} + Z_2\,\vec{k} \\ &\dots\ \dots\ \dots \\ \vec{a}_n &= X_n\,\vec{i} + Y_n\,\vec{j} + Z_n\,\vec{k} \end{aligned}$$

los vectores deslizantes del sistema, situados sobre rectas que pasan respectivamente por los puntos:

$$\begin{matrix} A_1(x_1,\ y_1,\ z_1) & & \vec{OA}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \\ A_2(x_2,\ y_2,\ z_2) & \textit{cuyos vectores} & \vec{OA}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} \\ \dots\ \dots\ \dots & \textit{de posición son} & \dots\ \dots\ \dots \\ A_n(x_n,\ y_n,\ z_n) & & \vec{OA}_n = x_n\vec{i} + y_n\vec{j} + z_n\vec{k} \end{matrix}$$

La expresión del momento del vector $\vec{a}_i$ respecto del origen será:

$$\vec{M}_i = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ X_i & Y_i & Z_i \end{vmatrix} = (y_iZ_i - z_iY_i)\vec{i} + (z_iX_i - x_iZ_i)\vec{j} + (x_iY_i - y_iX_i)\vec{k} = L_i\vec{i} + M_i\vec{j} + N_i\vec{k} \qquad [2.13]$$

donde hemos denominado $L_i = y_iZ_i - z_iY_i$ $\quad M_i = z_iX_i - x_iZ_i$ $\quad N_i = x_iY_i - y_iX_i$ las tres coordenadas del momento del vector $\vec{a}_i$ respecto al origen, como se acostumbra. El conjunto de los números X_i Y_i Z_i L_i M_i N_i se denomina, frecuentemente, coordenadas del vector deslizante y equivale a cinco números, en concordancia con lo expresado en *§2.2*, ya que entre estos seis números existe la relación:

$$L_i\,X_i + M_i\,Y_i + N_i\,Z_i = 0 \qquad [2.14]$$

que expresa la ortogonalidad de los vectores $\vec{a}_i$ y $\vec{M}_i$.

La ***resultante*** del sistema y el ***momento resultante respecto a un punto*** cualquiera, por ejemplo el origen de coordenadas, se obtiene como suma de los vectores $\vec{a}_i$ y $\vec{M}_i$, respectivamente:

$$\vec{R} = \vec{i}\,\Sigma X_i + \vec{j}\,\Sigma Y_i + \vec{k}\,\Sigma Z_i \qquad \vec{M}_o = \vec{i}\,\Sigma L_i + \vec{j}\,\Sigma M_i + \vec{k}\,\Sigma N_i \qquad [2.15]$$

que escribiremos: $\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ $\qquad \vec{M}_o = L\vec{i} + M\vec{j} + N\vec{k}$.

Dado un punto P de coordenadas (x_p y_p z_p), el momento del vector $\vec{a}_i$ respecto del mismo será:

$$\vec{M}_{P_i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_i - x_p & y_i - y_p & z_i - z_p \\ X_i & Y_i & Z_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ X_i & Y_i & Z_i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_p & y_p & z_p \\ X_i & Y_i & Z_i \end{vmatrix} = \vec{M}_i - \vec{OP} \times \vec{a}_i \qquad [2.16]$$

y el momento del sistema respecto a dicho punto se obtendrá como suma de los correspondientes a cada uno de los vectores del sistema $\vec{a}_i$:

$$\vec{M}_P = \Sigma\vec{M}_{P_i} = \Sigma\vec{M}_i - \Sigma\vec{OP} \times \vec{a}_i = \vec{M}_o - \vec{OP} \times \Sigma\vec{a}_i = \vec{M}_o + \vec{PO} \times \vec{R} = L\vec{i} + M\vec{j} + N\vec{k} - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_p & y_p & z_p \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \qquad [2.17]$$

lo que constituye una nueva demostración de la *[2.7]* y el importante teorema que implica.

El desarrollo de la [2.17] nos da precisamente el ***campo de momentos*** del sistema de vectores deslizantes para cualquier punto genérico P(x y z):

$$\vec{M}_P = [L - (yZ - zY)]\,\vec{i} + [M - (zX - xZ)]\,\vec{j} + [N - (xY - yX)]\,\vec{k} \qquad [2.18]$$

El ***Automomento del sistema*** se obtiene sin más que multiplicar escalarmente la resultante y el momento en un punto cualquiera:

$$\vec{R}\cdot\vec{M}_o = XL + YM + ZN \qquad [2.19]$$

y el valor del ***momento mínimo*** será el Automomento dividido por el módulo de la Resultante:

$$m = \frac{\vec{R}\cdot\vec{M}}{R} = \frac{XL + YM + ZN}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \qquad [2.20]$$

Eje Central.- Como indicábamos en § 2.3, para los puntos del eje central debe verificarse que el momento resultante sea paralelo a la resultante. Tomando un punto genérico del eje, de coordenadas E(x y z) y estableciendo el paralelismo entre el momento en dicho punto $\vec{M}_E$ *-definido por la expresión del campo-* y la resultante $\vec{R}$, según [2.12] se obtiene la ecuación:

$$\frac{L - (yZ - zY)}{X} = \frac{M - (zX - xZ)}{Y} = \frac{N - (xY - yX)}{Z} \qquad [2.21]$$

que, para un sistema determinado, en el que se podrán calcular $\vec{M}$ y $\vec{R}$, corresponde a una recta paralela a la resultante.

Otro procedimiento consiste en obtener directamente, según [2.9], las coordenadas respecto a un punto P arbitrario o respecto al propio origen de coordenadas si sabemos el momento en él, de un punto $E_o(x_o\ y_o\ z_o)$ del eje central:

$$\vec{OE}_o = \frac{\vec{R}\times\vec{M}_o}{R^2} = \frac{1}{R^2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X & Y & Z \\ L & M & N \end{vmatrix} = x_o\vec{i} + y_o\vec{j} + z_o\vec{k} \qquad [2.22]$$

y una vez obtenido aplicar directamente las coordenadas de ese punto a la ecuación de una recta de la que sabemos su dirección:

$$\frac{x - x_o}{X} = \frac{y - y_o}{Y} = \frac{z - z_o}{Z} \qquad [2.23]$$

Planos Focales.- Dado un punto arbitrario $P_o(x_P\ y_P\ z_P)$, el momento resultante para dicho punto vendrá dado por la [2.18] y su plano focal correspondiente se obtendrá bajo la condición de perpendicularidad del vector momento con cualquier vector contenido en el plano $\vec{PP}_o$, siendo P(x y z) un punto genérico del mismo:

$$\vec{M}_P\cdot\vec{PP}_o = [L - y_PZ - z_PY](x - x_P) + [M - z_PX - x_PZ](y - y_P) + [N - x_PY - y_PX](z - z_P) = 0 \qquad [2.24]$$

Inversamente, si se desea determinar el ***foco P de un plano*** Π_P dado por la ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$, basta expresar el paralelismo entre el vector normal al plano, $A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$, y el momento resultante respecto a P, obteniéndose:

$$\frac{L - y_PZ + z_PY}{A} = \frac{M - z_PX + x_PZ}{B} = \frac{N - x_PY + y_PX}{C} \qquad [2.25]$$

que, junto con la ecuación del plano $Ax + By + Cz + D = 0$, determinan el punto P.

Comprobaremos, por último, mediante la utilización de coordenadas cartesianas, que no basta solo con el conocimiento del momento de un s.v.d. en dos puntos A y B para determinar la resultante y tener completamente definido del sistema.

Sean $\vec{M}_A = L_A \vec{i} + M_A \vec{j} + N_A \vec{k}$ y $\vec{M}_B = L_B \vec{i} + M_B \vec{j} + N_B \vec{k}$ los momentos conocidos del sistema en los puntos $A(x_A\ y_A\ z_A)$ y $B(x_B\ y_B\ z_B)$ respectivamente. Haciendo uso de la fórmula de paso de momentos podemos determinar el vector diferencia

$$\vec{M}_A - \vec{M}_B = \vec{AB} \times \vec{R} \Rightarrow (L_A - L_B)\vec{i} + (M_A - M_B)\vec{j} + (N_A - N_B)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

$$(L_A - L_B)\vec{i} + (M_A - M_B)\vec{j} + (N_A - N_B)\vec{k} = [Z(y_B - y_A) - Y(z_B - z_A)]\,\vec{i} + [X(z_B - z_A) - Z(x_B - x_A)]\,\vec{j} + [Y(x_B - x_A) - X(y_B - y_A)]\,\vec{k}$$

siendo X, Y, Z las componentes de la resultante que intentamos determinar: $\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$.

Igualando ambos miembros tendremos un sistema de 3 incógnitas con 3 ecuaciones del que resulta nulo el determinante de los coeficientes (regla de Cramer), lo que indica más de una solución como habíamos indicado en *§2.3* mediante un razonamiento vectorial.

En efecto,

$$\begin{array}{l} 0 \quad - Y(z_B - z_A) + Z(y_B - y_A) = L_A - L_B \\ X(z_B - z_A) + \quad 0 \quad - Z(x_B - x_A) = M_A - M_B \\ -X(y_B - y_A) + Y(x_B - x_A) + \quad 0 \quad = N_A - N_B \end{array} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -(z_B - z_A) & (y_B - y_A) \\ (z_B - z_A) & 0 & -(x_B - x_A) \\ -(y_B - y_A) & (x_B - x_A) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

y, por tanto:

$$X = \frac{\begin{vmatrix} L_A - L_B & -(z_B - z_A) & (y_B - y_A) \\ M_A - M_B & 0 & -(x_B - x_A) \\ N_A - N_B & (x_B - x_A) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & -(z_B - z_A) & (y_B - y_A) \\ (z_B - z_A) & 0 & -(x_B - x_A) \\ -(y_B - y_A) & (x_B - x_A) & 0 \end{vmatrix}} = \frac{(L_A - L_B)(x_B - x_A)^2 + (M_A - M_B)(x_B - x_A)(y_B - y_A) + (N_A - N_B)(x_B - x_A)(z_B - z_A)}{0} =$$

$$\square = (x_B - x_A)\,\frac{(L_A - L_B)(x_B - x_A) + (M_A - M_B)(y_B - y_A) + (N_A - N_B)(z_B - z_A)}{0} = (x_B - x_A)\,\frac{(\vec{M}_A - \vec{M}_B)\cdot\vec{AB}}{0} = \frac{0}{0}$$

puesto que $(\vec{M}_A - \vec{M}_B) \perp \vec{AB}$.

Como habíamos indicado, es necesario al menos el conocimiento del momento en tres puntos no alineados para definir completamente el sistema y poder determinar el campo de momentos. El hecho de que los tres puntos estén alineados implica que obtendríamos siempre el mismo plano donde se encuentra la resultante y es necesario que al menos dos planos no sean el mismo para obtener la dirección de la resultante de su intersección.

3. S.V.D. ESPECIALES Y EQUIVALENTES

3.1 CASOS ESPECIALES DE S.V.D.

Entre todos los sistemas de vectores deslizantes hay unos que nos interesan de modo especial por ser los que nos vamos a encontrar con mayor frecuencia o a los que vamos a asimilar los casos reales en nuestro estudio. Todos tienen una característica en común: el Automomento del sistema va a ser nulo: $k = \vec{R}\cdot\vec{M} = 0$, sin serlo, en principio, los elementos que intervienen en la expresión; es decir, en general $\vec{M}_P \neq 0$ y $\vec{R} \neq 0$ por lo que el momento mínimo del sistema será nulo $\mathcal{M} = \frac{\vec{R}\cdot\vec{M}}{R} = 0$ y la distribución del campo de momentos ya no será la HELICOIDAL de los sistemas generales de Automomento no nulo, sino que va a degenerar en una distribución CIRCULAR según planos perpendiculares a la dirección del eje central (*fig. 3.1*).

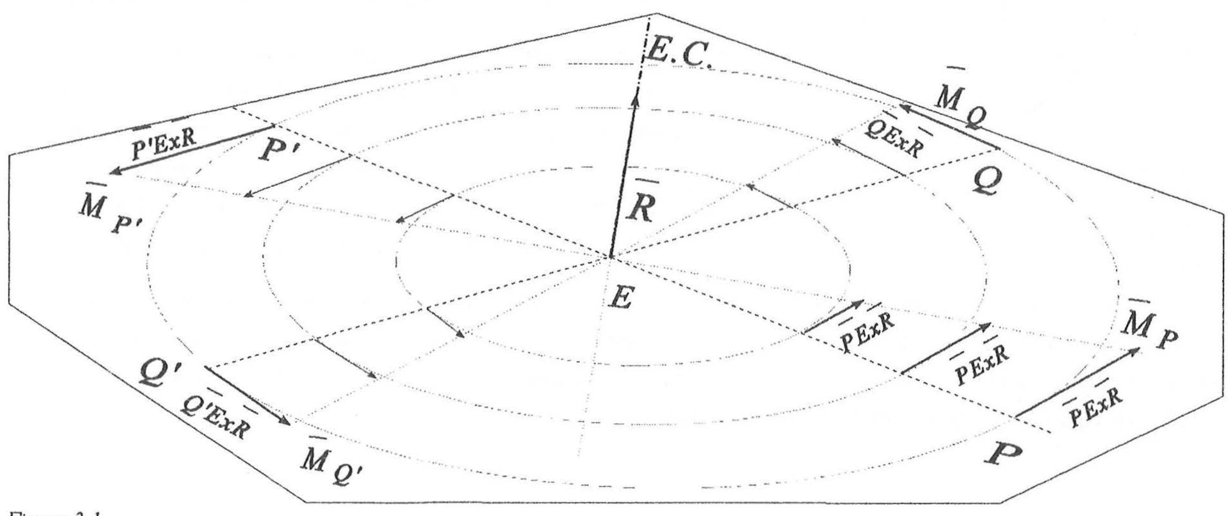


Figura 3.1

Podremos decir, por tanto, que en todos estos sistemas *el momento resultante del sistema es el momento de la resultante del sistema* ... a condición que la supongamos localizada en el Eje Central.

SISTEMAS ESPECIALES (DEGENERADOS)	$\vec{R}\cdot\vec{M} = 0$ $\vec{M}_P \neq 0$ $\vec{R} \neq 0$	▹ $\vec{M}_I = \frac{0}{R^2}\vec{R} = \vec{0}$ ▹ $\vec{M}_P = \vec{M}_I + \vec{PI}\times\vec{R} = \vec{PI}\times\vec{R}$ CAMPO DE MOMENTOS CIRCULAR

3.1.1 SISTEMA DE VECTORES PARALELOS

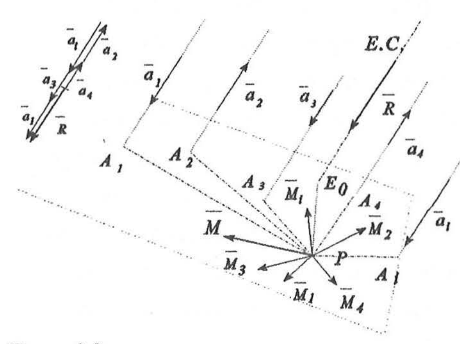


Figura 3.2

Entenderemos por sistema de vectores deslizantes paralelos al que tiene las rectas de acción de cada uno de los vectores paralelas a una dirección común, definida por un vector unitario $\vec{\epsilon}$, de manera que cada vector podrá expresarse en la forma $\vec{a}_i = a_i\,\vec{\epsilon}$, donde a_i puede ser un número positivo o negativo según sea el sentido del vector.

En consecuencia, la resultante del sistema tendrá también la misma dirección que se escribirá:

$$\vec{R} = \Sigma\, a_i\vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}\;\Sigma a_i = R\vec{\epsilon} \qquad [3.1]$$

Como los momentos de cada uno de los vectores del sistema respecto a un punto $\vec{M}_P^{(i} = \vec{PA}_i \times \vec{a}_i = \vec{PA}_i \times a_i \vec{\epsilon} = a_i \vec{PA}_i \times \vec{\epsilon}$ son normales a la dirección común de $\vec{\epsilon}$, estarán todos contenidos en el mismo plano y, por tanto, el momento resultante será normal a $\vec{R}$, encontrándonos en el caso particular de Automomento nulo mencionado. El sistema puede reducirse a la resultante situada sobre el eje central que se determina por la ecuación vectorial: $\frac{\vec{M}_P \times \vec{R}}{R^2} = \vec{EP} - \vec{EE}_o = -\vec{PE}_o$, como veíamos en el capítulo anterior, siendo el término $\frac{\vec{R} \times \vec{M}_P}{R^2} = \vec{PE}_o$ el vector de posición relativo a P del punto E_o donde el Eje corta al plano de referencia.

3.1.2 SISTEMA DE VECTORES CONCURRENTES

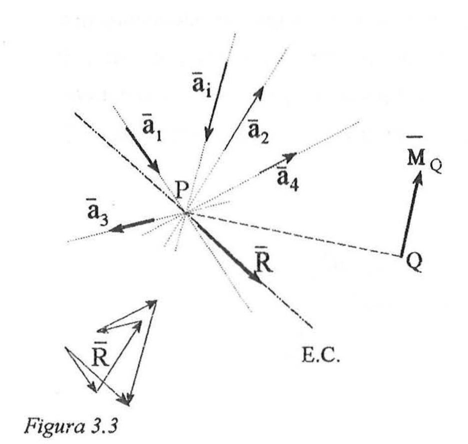


Figura 3.3

Es un sistema en el que todas las rectas de acción de los vectores pasan por un mismo punto (*fig.3.3*) respecto al cual, evidentemente, el momento del sistema será nulo, y por tanto mínimo, perteneciendo así dicho punto al eje central, siendo el único caso en el que se conoce de antemano uno de los puntos del Eje.

Responde igualmente a lo descrito para sistemas circulares y la suma de los momentos de los vectores es igual al momento de la suma de los vectores (resultante), supuesta aplicada en el punto de concurrencia, si bien, por tratarse de vectores deslizantes, la resultante no será un vector aplicado en dicho punto sino que será otro vector deslizante, acogiendo de forma particular el conocido Teorema de Varignon para vectores con el mismo punto de aplicación.

La demostración es muy sencilla; basta aplicar a este caso la expresión de *cambio de momentos* tomando para punto P el de concurrencia de los vectores, de forma que $\vec{M}_P = 0$. Por tanto $\vec{M}_Q = \vec{QP} \times \vec{R}$, lo que indica que para cualquier punto Q, el momento resultante del sistema $\vec{M}_Q$ iguala el momento de la resultante $\vec{R}$ situada en el punto P de concurrencia de los vectores o, por supuesto, cualquier otro de su recta de acción.

3.1.3 SISTEMA DE VECTORES COPLANARIOS

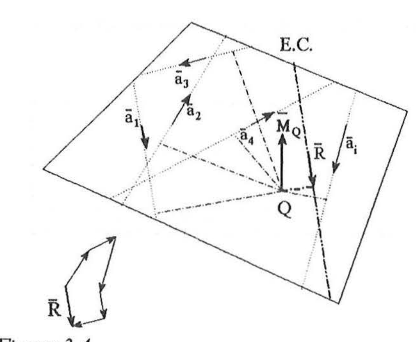


Figura 3.4

Si los vectores del sistema están contenidos en un plano, la resultante también lo estará y como los momentos $\vec{M}_{Qi}$ de cada uno de los vectores, respecto a cualquier punto Q del plano, serán perpendiculares al plano, el momento resultante será perpendicular a la resultante y el Automomento será nulo (sistema circular). Es decir, el momento mínimo, como en los casos anteriores, será nulo y la reducción más sencilla del sistema de vectores coplanarios será la resultante situada sobre el eje central ya que, en los puntos de éste, el momento resultante tiene que ser nulo por estar obligado a ser perpendicular al plano y al mismo tiempo estar contenido en él para ser paralelo a la resultante.

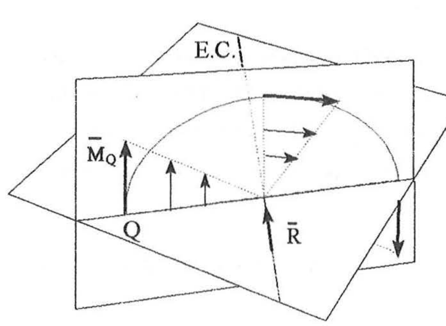


Figura 3.5

La distribución circular de momentos, por encontrarse en la familia de planos perpendiculares al Eje Central se desarrolla en planos perpendiculares al que contiene los vectores del sistema, pero los momentos del campo respecto a los puntos del plano serán perpendiculares al plano en cuestión (*fig.3.4*), donde estará contenido, asimismo, el eje central y, en consecuencia, el lugar geométrico de los puntos del plano del sistema respecto a los cuales el momento tendrá igual valor modular será las dos rectas paralelas y a igual distancia del eje central, correspondiendo una al valor positivo y la otra al negativo que se entenderán como saliendo y entrando, respectivamente, en él.

3.2 SUPERPOSICIÓN DE ACCIONES.

De la definición de Momento Resultante de un sistema de vectores deslizantes en un punto P del espacio, como suma vectorial de los momentos de cada uno de los vectores del sistema en dicho punto, se deduce que si a los efectos de un sistema S_1 $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n\}$ se superponen los de otro sistema S_2 $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots \vec{ba}_n\}$, ambos con sus respectivas rectas de acción, en un mismo punto P tendríamos aplicados dos momentos cuya suma vectorial, por extensión, podría entenderse como el momento del sistema total S_T, suma de S_1 y S_2.

Y dado que podíamos reducir un s.v.d. por su momento en un punto y la resultante (obtenida como suma de vectores libres equipolentes a los del sistema) aplicada en él, las resultantes de los sistemas S_1 y S_2, aplicadas en el mismo punto, sumadas, nos daría un nuevo vector suma $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2$ de todos los vectores de uno y otro sistema, por lo que podría entenderse como Resultante del sistema total.

Los invariantes del sistema total obtenido no serán, por lo general, suma de los invariantes de cada uno de los sistemas que lo componen, sino que se calcularán nuevamente como si se tratara de un sistema único reduciendo previamente aquéllos a un mismo punto para poder sumar los momentos de cada uno. Es decir, el Automomento del sistema total será:

$$K = \vec{R} \cdot \vec{M} = (\vec{R}_1 + \vec{R}_2) \cdot (\vec{M}_P^{(1} + \vec{M}_P^{(2}) = \vec{R}_1 \cdot \vec{M}_P^{(1} + \vec{R}_2 \cdot \vec{M}_P^{(2} + \vec{R}_1 \cdot \vec{M}_P^{(2} + \vec{R}_2 \cdot \vec{M}_P^{(1} = m_1 + m_2 + \vec{R}_1 \cdot \vec{M}_P^{(2} + \vec{R}_2 \cdot \vec{M}_P^{(1}$$

y la resultante: $R = |\vec{R}_1 + \vec{R}_2| \neq R_1 + R_2$, salvo que se trate de vectores paralelos, por lo que el momento mínimo del nuevo sistema será:

$$m = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}}{R} = \frac{(\vec{R}_1 + \vec{R}_2) \cdot (\vec{M}_P^{(1} + \vec{M}_P^{(2})}{|\vec{R}_1 + \vec{R}_2|} = \frac{\vec{R}_1 \cdot \vec{M}_P^{(1} + \vec{R}_2 \cdot \vec{M}_P^{(2} + \vec{R}_1 \cdot \vec{M}_P^{(2} + \vec{R}_2 \cdot \vec{M}_P^{(1}}{|\vec{R}_1 + \vec{R}_2|}$$

Obviamente, si a los vectores de un sistema S_1 se le añaden los de otro sistema S_2 nulo, es decir, que son nulos su resultante y el momento resultante respecto a un punto cualquiera del espacio (ya que lo será también respecto a cualquier otro punto, por la fórmula de paso), el nuevo sistema S_1+S_2 será distinto por tener más o menos vectores que el inicial pero tendrá los mismos invariantes que aquél. En consecuencia, el campo de momentos no habrá variado, y diremos que, sin tratarse del mismo sistema, será equivalente al sistema inicial.

3.3 SISTEMAS EQUIVALENTES E IDÉNTICOS.

En este sentido diremos que dos sistemas de vectores son *EQUIVALENTES* cuando, estando formados por vectores deslizantes distintos en módulo, dirección y sentido, tienen el mismo momento resultante en todos los puntos del espacio, es decir, producen el mismo campo de momentos, mientras que dos sistemas de vectores serán *IDÉNTICOS* cuando, sin ser el mismo por representar por ejemplo magnitudes físicas diferentes, además de producir el mismo campo de momentos, ambos estén formados por igual número de vectores con el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido, actuando respectivamente sobre la misma recta de acción.

Para comprobar que el campo de momentos de dos sistemas es el mismo basta comprobar si se verifica que la resultante de ambos es la misma y tienen el mismo momento resultante en un solo punto del espacio, ya que la ecuación de paso de momentos nos hace ver en el acto que habrán de tener el mismo momento en todos los puntos del espacio. En efecto, si $\vec{R}$ y $\vec{M}_o$ son la resultante y el momento resultante en O del sistema S y $\vec{R}'$, $\vec{M}_o'$ las correspondientes al sistema S' equivalente, resulta: $\vec{M}_P' = \vec{M}_O' + \vec{PO} \times \vec{R}' = \vec{M}_O + \vec{PO} \times \vec{R} = \vec{M}_P$.

También puede comprobarse, inversamente, que si dos sistemas tienen el mismo momento resultante para tres puntos, no situados entre sí de modo especialmente desfavorable (basta, por ejemplo, con que no estén alineados), ambos sistemas han de tener la misma resultante y, por tanto, serán equivalentes.

En efecto, denominemos $P_1\,P_2\,P_3$ los tres puntos para los que coinciden los momentos $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$, $\vec{M}_3$ de ambos sistemas cuyas resultantes designaremos por $\vec{R}$, $\vec{R}'$. Por el teorema del cambio de momentos aplicado a los puntos P_1 y P_2 tendremos, para el primer sistema: $\vec{M}_2 = \vec{M}_1 + \vec{R} \times \vec{P_1P_2}$, y para el segundo: $\vec{M}_2 = \vec{M}_1 + \vec{R}' \times \vec{P_1P_2}$, de los que obtendremos, por diferencia, $(\vec{R} - \vec{R}') \times \vec{P_1P_2} = 0$ que indica que, o bien $\vec{R} = \vec{R}'$, o $\vec{R} - \vec{R}'$ es un vector paralelo a $\vec{P_1P_2}$. Nos pondremos en este segundo caso y al aplicar el mismo procedimiento a los puntos P_2, P_3 obtendremos, análogamente, que el vector $\vec{R} - \vec{R}'$ ha de ser nulo o paralelo al vector $\vec{P_1P_3}$.

Como quiera que los vectores $\vec{P_1P_2}$ y $\vec{P_1P_3}$ no son paralelos, por no estar alineados, el vector $\vec{R} - \vec{R}'$ habrá de ser nulo y $\vec{R} = \vec{R}'$. Los dos sistemas tendrán, pues, la misma resultante y el mismo momento resultante respecto a todos los puntos del espacio, por lo que serán equivalentes.

3.4 REDUCCIÓN A UN S. V. D. EQUIVALENTE.

Hasta ahora hemos hablado de reducir un sistema de vectores a un punto cualquiera o a un punto de su eje central, que consistía en dar la resultante del sistema como vector ***"aplicado"*** o más correctamente como vector ***"deslizante"*** por el punto del que se conoce el momento, bastando con la resultante y el momento en ese punto para tener definido el campo de momentos. Sin embargo no podemos decir que dicha reducción sea un s.v.d. equivalente ya que el momento no es ***un vector*** y mucho menos deslizante ya que, por tratarse de un campo, tendrá un valor diferente en cada punto del espacio.

Se entiende por ***"reducir un sistema de vectores deslizantes a otro equivalente"*** la operación de sustituir el sistema dado con otro formado por la resultante y otro sistema de vectores deslizantes que produzca igual momento en el punto al que se ha reducido, sin modificar la resultante inicial.

La transformación del momento solo puede conseguirse mediante un sistema de resultante nula y momento igual al de reducción, siendo el más sencillo el sistema formado por dos vectores iguales y de sentido opuesto no situados sobre la misma recta de acción que se denomina ***PAR***. Este sistema, caso particular de sistemas planos y de sistemas paralelos, tiene resultante nula al ser vectores iguales y opuestos, por lo que el momento resultante es el mismo en todos los puntos del espacio de acuerdo con la ecuación de paso, es decir, $\vec{M}_P = \vec{M}_Q + \vec{PQ} \times \vec{R} = \vec{M}_Q$ valiendo:

$$\vec{M}_o = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r} \times \vec{a} + \vec{r}' \times (-\vec{a}) = \vec{r} \times \vec{a} - \vec{r}' \times \vec{a} = (\vec{r} - \vec{r}') \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{AA}' \qquad [3.2]$$

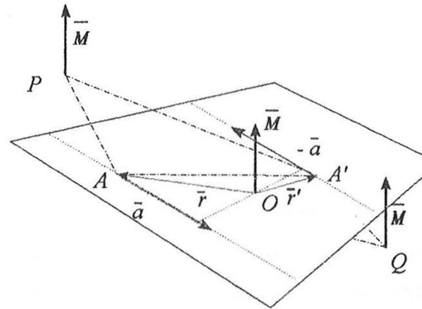


Figura 3.6

Como el momento será un vector (constante) perpendicular al plano que forman ambos vectores *(fig.3.6)* y su módulo será el módulo de uno por la distancia entre ambos, el par será equivalente a cualquier otro que dé el mismo momento, pudiendo girar en su plano, trasladarlo a otro plano paralelamente a sí mismo, o bien reducir y aumentar la distancia entre las rectas de acción proporcionalmente a la variación de los módulos.

En base a las propiedades de un Par, si la distancia entre las rectas de acción de los vectores del Par es nula, es decir los vectores iguales y opuestos se sitúan sobre la misma recta de acción, el sistema equivaldrá a un sistema nulo ya que se anularán tanto la resultante como el momento resultante del par, lo que nos permitirá transformar a su vez la resultante de un sistema cualquiera simplemente sumándole un sistema nulo de estas características haciendo concurrir las respectivas rectas de acción.

Sumando la resultante con uno de los vectores del par nulo obtendríamos dos vectores equivalentes que no son otra cosa que las propias componentes de la resultante según dos direcciones determinadas.

Figura 3.7

En definitiva, las transformaciones posibles que nos permiten obtener un sistema equivalente a otro dado se resumen en:

a) Sustituir un ***momento*** por un ***par de vectores*** arbitrario contenido en un plano normal a la dirección del momento, siempre que el módulo de uno de ellos por el "brazo" del par (distancia de las rectas de acción) sea igual al módulo del momento y que el sentido de "giro" del par coincida con la dirección de aquél.

b) Sustituir varios vectores, situados sobre rectas ***concurrentes*** en un punto, por ***su resultante*** y viceversa.

Como la forma más sencilla de expresar un sistema es mediante su eje central, el valor de la resultante y el momento mínimo, analizaremos el modo de encontrar un sistema equivalente a otro dado en base a su reducción al eje central, dejando como uno de los vectores del nuevo sistema la propia resultante sobre el eje y sustituyendo el momento mínimo por un sistema equivalente de resultante nula y el mismo momento que aquél.

A) En el caso más general, en que $\vec{M} \cdot \vec{R} \neq 0$, es siempre posible reducir un sistema a otro formado por un **vector** y un **par**. Para ello consideraremos un punto cualquiera del espacio y situaremos en él la resultante del sistema, de manera que no da momento respecto al punto, añadiendo un par cuyo momento coincida con el momento resultante del sistema para ese punto.

La resultante y el par equivalen, en efecto, al sistema dado, pues tienen la misma resultante y además el mismo momento resultante para un punto, y, por ende, para todos los puntos del espacio. Si el punto se elige sobre el Eje Central el momento será mínimo y tendrá la dirección de aquél y, por tanto de la resultante, con lo que el par estará situado sobre un plano normal.

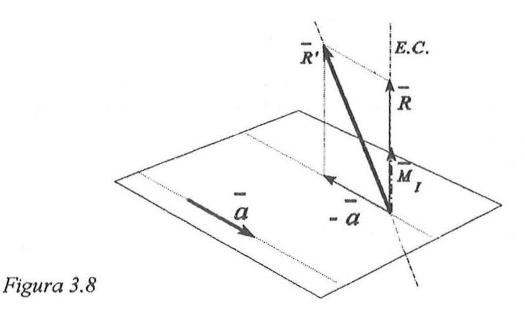


Figura 3.8

Evidentemente, también es posible sustituir el sistema por **solo dos vectores**, ya que podemos trasladar el par *(fig.3.8)* hasta hacer coincidir uno de sus vectores con el punto elegido y sumarlo a la resultante, quedando reducido el sistema a este vector y al otro vector del par.

Las dos rectas sobre las que se encuentran uno y otro vector se denominan "***rectas conjugadas***" y responden a la polaridad definida en el capítulo anterior.

En efecto, dos rectas conjugadas se corresponden de forma que los planos focales de los puntos de una de ellas se cortan sobre la otra (polares recíprocas). Si, dado un sistema de vectores deslizantes, es $\vec{M}_P$ su momento resultante en un punto P, tomaremos un par $+\vec{V},-\vec{V}$ cualquiera que tenga momento $\vec{M}_P$ y, trasladando el par, haremos coincidir el origen de $-\vec{V}$ (por ejemplo) con P. A este mismo punto llevaremos la resultante $\vec{R}$ y la compondremos con $-\vec{V}$, obteniendo así un vector $\vec{U} = \vec{R} - \vec{V}$ que, junto con el vector $+\vec{V}$ nos da el conjunto de los dos vectores deslizantes que equivalen al sistema.

La recta u sobre la que se encuentra el vector $\vec{U}$ y la v de acción del vector $\vec{V}$ son, por definición, rectas conjugadas. Al pasar la u por el punto P, el momento del vector $\vec{U}$ respecto a este punto es nulo y $\vec{M}_P$ se debe únicamente al vector $\vec{V}$. Será pues $\vec{M}_P$ normal al plano determinado por P y v, que será, por tanto, el plano focal Π_P del punto P.

Al trasladar $\vec{U}$ sobre su recta de acción u, el sistema no se altera y, al considerarse aplicado en un punto Q de dicha recta, por idéntico razonamiento, el momento $\vec{M}_Q$ respecto a este punto es normal al plano Π_Q determinado por Q y la recta v y que será el plano focal del punto Q. Como esta circunstancia se verifica para todos los puntos de la recta u, sus planos focales constituirán un haz que pasa por la recta v, como deseábamos demostrar.

Obsérvese que hemos demostrado que dos rectas conjugadas son polares recíprocas; no se verifica, sin embargo, que dos polares recíprocas sean siempre rectas conjugadas.

B) Para los casos en que $\vec{R} \cdot \vec{M} = 0$, el sistema se reducirá atendiendo a los valores de la resultante $\vec{R}$ y el momento $\vec{M}_P$ para un punto genérico P:

$R \neq 0$	$M_P = 0$	*El sistema se reduce exclusivamente al vector $\vec{R}$ situado sobre el eje central para el cual el momento mínimo es $\vec{M}_E = 0$*
$R = 0$	$M_P \neq 0$	*El sistema se reduce a cualquier par de momento $\vec{M}_P$, igual para todos los puntos del espacio.*
$R = 0$	$M_P = 0$	*Por definición el sistema es un sistema nulo cuya mayor aplicación se verá en la determinación de equilibrio en Estática.*

En resumen, atendiendo a la clasificación de sistemas definida en base a su reducción al eje central, los sistemas equivalentes más sencillos serán:

DENOMINACIÓN	CAMPO DE MOMENTOS	REDUCCIÓN AL EJE CENTRAL	REDUCCIÓN EQUIVALENTE
A) SISTEMAS GENERALES $\vec{R} \cdot \vec{M} = k \neq 0$	$\vec{R} \neq 0 \;\triangleright\; \vec{M}_E = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}}{R^2} \vec{R} \neq \vec{0}$ $\vec{M}_A = \vec{M}_E + \vec{AE} \times \vec{R}$ ***HELICOIDAL***	E.C., R, M_E, M_A, AExR, A, M_E	a, -a, R **sistema de vectores conjugados**
B) SISTEMAS DEGENERADOS $\vec{R} \cdot \vec{M} = 0$ $\vec{M}_P \neq 0$	$\vec{R} \neq 0 \;\triangleright\; \vec{M}_E = \frac{0}{R^2} \vec{R} = \vec{0}$ $\vec{M}_A = \vec{M}_E + \vec{AE} \times \vec{R} = \vec{AE} \times \vec{R} \neq 0$ ***CIRCULAR***	E.C., R, E, M_B, B	R, -a, a **sistema de vectores concurrentes**
	$\vec{R} = 0 \;\triangleright\; \vec{M}_I = \frac{0}{0} \vec{0}$ *Indeterminado* $\vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{AB} \times \vec{R} = \vec{M}_B = \vec{cte} \neq \vec{0}$ ***CONSTANTE***	M, M, M	a, -a **sistema de vectores pareados**
C) SISTEMAS NULOS $\vec{R} \cdot \vec{M} = 0$ $\vec{M} = 0$	$\vec{R} = \vec{0}$ $\vec{M}_A = \vec{M}_B = \vec{M}_C = 0$ ***NULO***		-a, a **sistema de vectores nulo**

3.5 ESTUDIO GRÁFICO DE SISTEMAS PLANOS

Como ya hemos visto, podemos reducir un sistema de vectores coplanarios a un único vector, la resultante, situada sobre el Eje central ya que el momento respecto a cualquiera de sus puntos es cero. El procedimiento gráfico que vamos a ver a continuación para determinar su situación en el plano consiste en descomponer cada uno de los vectores del sistema en otros dos vectores arbitrarios equivalentes (concurrentes con ellos), de forma que cada una de sus componentes se anulen respectivamente con las componentes de los vectores anterior y posterior del sistema, a excepción de los vectores extremos, cuyas componentes no anuladas determinarán, en su intersección, el punto del eje central sobre el que se trazará la resultante, de dirección ya determinada anteriormente. El procedimiento es el siguiente:

Situando en cualquier orden y a partir de un punto y escala arbitrarios, los vectores equipolentes a los del sistema, haciendo coincidir el punto de aplicación de cada uno de los vectores con el extremo del anterior, (polígono de Varignon ABCDE), obtendremos gráficamente la resultante del sistema trazando el vector que tenga por origen el punto de aplicación del primero y como extremo el del último de ellos AE. Con ayuda de un punto arbitrario O, llamado *polo*, trazamos los radios vectores OA OB OC OD y OE sobre los que vamos a descomponer los vectores del sistema, trasladándolos, mediante paralelas, a la otra figura.

Para ello trazamos dos rectas a y b, paralelas respectivamente a OA y OB, a partir de un punto cualquiera de $\vec{V}_1$ y, por el punto en que b corta a $\vec{V}_2$, trazamos la dirección c paralela a OC, continuando de igual forma con las direcciones d y e, hasta formar el polígono *abcde* conocido como *polígono funicular*.

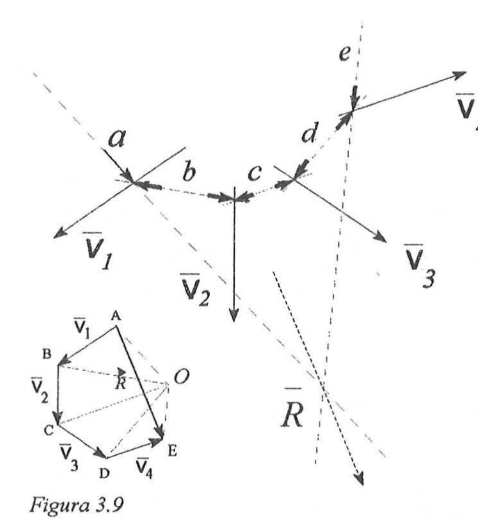


Figura 3.9

$$\vec{V}_1 = \vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB}$$
$$\vec{V}_2 = \vec{BC} = \vec{BO} + \vec{OC}$$
$$\vec{V}_3 = \vec{CD} = \vec{CO} + \vec{OD}$$
$$\vec{V}_4 = \vec{DE} = \vec{DO} + \vec{OE}$$
$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$
$$\vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4 = \vec{AO} + \vec{OE}$$

Al trasladar a éste los vectores obtenidos en el polígono de Varignon $\vec{AO}$, $\vec{OB}$, $\vec{BO}$, $\vec{OC}$, $\vec{CO}$,... se forman pares de vectores directamente opuestos que se anulan mutuamente, quedando el sistema reducido a los vectores $\vec{AO}$ y $\vec{OE}$, concurrentes en el punto G. Este punto pertenecerá al eje central buscado que habrá de tener la dirección de la resultante hallada en el polígono de Varignon.

Como el punto O es arbitrario, se comprende que todo sistema de vectores tiene infinidad de polígonos funiculares, pero todos ellos determinan un único eje central.

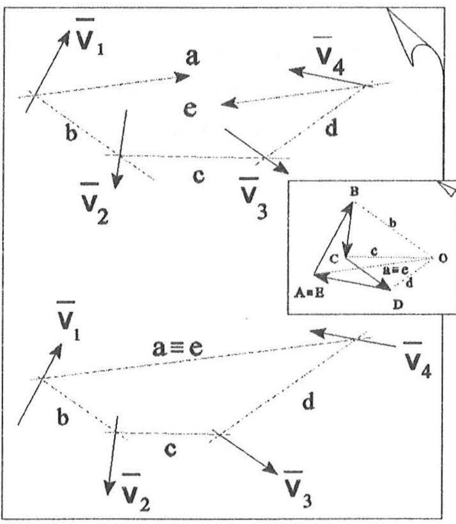


Figura 3.10

Si la resultante del sistema de vectores es $\vec{R} = 0$ el polígono de Varignon será cerrado, coincidiendo los puntos A y E, por lo que el sistema será equivalente a los $\vec{AO}$ y $\vec{OE}$, que ahora coinciden, verificándose la igualdad de módulos y sentidos contrarios.

En este caso, ***si el polígono funicular no es cerrado, el sistema es equivalente a un par***, situados sobre los lados ***a*** y ***e***.

Si además de ser cerrado el polígono de Varignon, lo es también el funicular, el sistema de vectores será nulo, dado que, en todas las direcciones del funicular a b c d e, los vectores que resultan equivalentes a los del sistema son iguales y opuestos.

Por último, podríamos también reducir gráficamente el sistema de vectores dado a otro sistema formado por la resultante, situada en cualquier otro punto del plano, y un par cuyo momento fuera el momento del sistema respecto a dicho punto.

Como el sistema es equivalente al formado por los dos vectores concurrentes $\vec{AO}$ y $\vec{OE}$, cuyas rectas de acción son los extremos ***a*** y ***e*** del polígono funicular, el Momento Resultante del sistema será también el de estos dos vectores y como son concurrentes podemos establecer, por el teorema de Varignon, que el momento resultante es también el momento de la resultante.

De aquí el procedimiento gráfico para calcular el momento resultante de un sistema de vectores deslizantes coplanarios respecto a un punto cualquiera del plano.

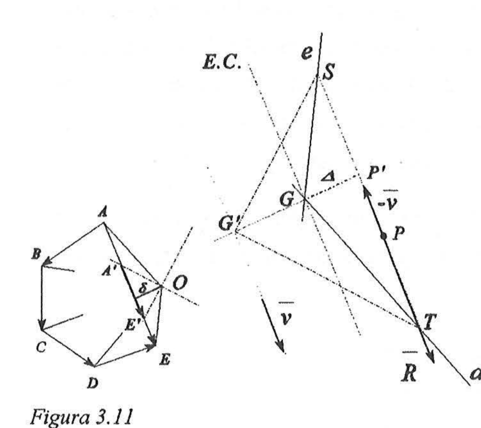


Figura 3.11

Por lo visto anteriormente, el momento resultante del sistema respecto a un punto P valdrá: $M = R \cdot \Delta$ pero si trazamos por dicho punto una paralela al eje central, ésta cortará a las direcciones ***a*** y ***e*** en los puntos S y T, formándose el triángulo SGT, semejante al triángulo OAE del polígono de Varignon, por lo que podemos establecer:

$$\frac{\bar{AE}}{\delta} = \frac{\bar{ST}}{\Delta}$$

y como AE = R, resulta:

$$M = \bar{AE} \cdot \Delta = R \cdot \Delta = \bar{ST} \cdot \delta$$

Ahora bien, si queremos sustituir el momento (perpendicular al plano) por un par equivalente $\{ \mathbf{v}, -\mathbf{v}\}$, el brazo del par será mayor o menor que Δ según sea menor o mayor el módulo ***v*** del par. Trazando por G la normal a la dirección del eje central y uniendo el punto G', obtenido a la distancia ***G'P'=Δ'*** correspondiente al brazo del par, con los puntos S y T, obtendremos otro triángulo G'ST cuyo semejante OA'E' en el polígono de Varignon nos dará el módulo v del par equivalente al momento en P. En efecto,

$$\frac{A'E'}{ST} = \frac{\delta}{\Delta'} \Rightarrow ST = A'E'\frac{\Delta'}{\delta} = v\frac{\Delta'}{\delta} \Rightarrow M_P = \delta\, ST = \delta v\frac{\Delta'}{\delta} = v\,\Delta'$$

pudiendo elegir cualquier otro par sin más que trazar en el polígono de Varignon otras paralelas a G"S y G"T a partir de del polo O cuya intersección con AE proporcionarán el módulo del par.

Para encontrar gráficamente un sistema equivalente al dado, bastará pues colocar la resultante en otra recta paralela al eje central y sustituir el momento correspondiente por un par arbitrario obtenido por el procedimiento anterior cuya dirección se puede modificar sin alterar el momento siempre que estén contenidas en el plano y no varíe el brazo del par.

4. SISTEMAS DE VECTORES APLICADOS

4.1 ESTUDIO DE LOS SISTEMAS DE VECTORES APLICADOS.

La teoría desarrollada para los vectores deslizantes empieza a resultarnos muy sugerente, no solo por facilitarnos una expresión genérica del campo de momentos, lo cual reduciría considerablemente nuestro trabajo, sino además por las propiedades del campo mismo, de las que vislumbramos ya, en parte, su utilidad a pesar de ser una "mentira" matemática; es decir, una herramienta exacta de la que intentamos valernos en un problema casi nunca exacto por ser "tan solo" una mera aproximación.

Y es que, en realidad, las fuerzas, que expresaremos simplificadamente como magnitudes vectoriales, no van a ser vectores deslizantes, sino APLICADOS en puntos concretos e incluso demasiado concretos, ya que van a ser "puntos" materiales y, como tales, una abstracción más de la realidad. Y aunque a determinado nivel de estudio y bajo ciertas premisas este dato no va a influir en determinados aspectos del resultado global, el "acercamiento" al problema evidenciará su "alejamiento" de la realidad. En consecuencia, la aplicación de la teoría de vectores deslizantes, como cualquier otra, requiere tener bien claros y presentes sus límites de validez.

Al definir el momento de un vector respecto a un punto demostramos que el resultado era idéntico si el vector lo considerábamos aplicado en puntos diferentes de su recta de acción. Por tanto, el momento de un sistema de vectores aplicados, respecto a un punto, no se diferenciará en nada del momento respecto al mismo punto de cualquier otro sistema formado por los mismos vectores aplicados sobre diferentes puntos de las mismas rectas de acción y tampoco, en definitiva, del sistema de vectores deslizantes correspondiente, por lo que gozará de las mismas propiedades y características que él.

Nada parece indicar, en este sentido, que puedan surgir problemas al plantear el estudio de los sistemas de vectores aplicados como vectores deslizantes, pero empezamos a sospechar algo cuando tratamos de encontrar un SISTEMA EQUIVALENTE AL SISTEMA DE VECTORES APLICADOS ya que, al no ser biunívoca la correspondencia con el campo de momentos generado, cualquier sistema equivalente que encontremos de un sistema de vectores aplicados será, en general, *un sistema de vectores deslizantes,* no aplicados como el sistema del que partimos, perdiéndose la referencia con los puntos de aplicación de aquél. En otras palabras, si un sistema de vectores aplicados es equivalente a uno dado, también lo serán todos los sistemas formados por los mismos vectores que tengan diferentes puntos de aplicación en las mismas rectas de acción, por lo que no podemos limitarlo a uno solo.

Con lo visto hasta ahora poco parece importar este dato, pero, en realidad, poco es lo que hemos visto hasta ahora. A decir verdad tan solo una instantánea de lo que tendríamos que ver, puesto que el parámetro tiempo va a jugar un papel primordial en la Mecánica y su objetivo es el conocimiento "en todo instante" de los sistemas "de vectores", por añadidura "aplicados", que van a intervenir.

Obviamente, el estudio de cada instantánea del *sistema real* supondría una tarea inabordable cuyo seguimiento sería imposible de realizar de no encontrar un *sistema equivalente* reducido cuya variación siguiera una determinada ley. Por tanto, el tratar de simplificar el problema buscando un sistema equivalente encuentra ahora su justificación, pero también alerta de un posible riesgo que hay que prever pues, en cada "*instantánea*" como la que hemos analizado hasta ahora, los puntos de aplicación de los vectores podrán variar, no solo porque el *sistema o marco de referencia* elegido "modifique" su posición respecto al sistema de vectores, sino porque varíen a su vez las ***posiciones relativas*** entre los distintos puntos de aplicación. En otras palabras, porque se "deforme" el *sistema material* que lo ha de soportar.

Si la distancia relativa entre los puntos de aplicación de un sistema de vectores permanece invariable (hablaremos en su momento de indeformabilidad o de rigidez), tampoco se modificará la posición relativa de un punto que, en un instante dado, pertenezca al eje central, aunque tal vez no sea el punto más adecuado para reducir el sistema de vectores si en instantes sucesivos deja de pertenecer a dicho eje por intervenir algún parámetro que modifique la dirección y posición del eje relativa al soporte material.

Es decir, esa referencia podrá dejar de sernos útil y compensará más elegir un punto fijo o un punto que tenga alguna característica especial, si lo encontramos, cuando el eje central, en cada instante, esté constituido por puntos distintos del soporte material. En cualquier caso, siempre será posible encontrar expresiones que nos indiquen en cada instante dónde se va a localizar y qué dirección va a tener el eje central, permitiéndonos conocer el campo de momentos en cada instante.

Sin embargo, si nos limitamos al análisis de la variación en el tiempo de un sistema de vectores deslizantes equivalente, en un instante dado, a un sistema de vectores aplicados, perdiendo toda referencia a los puntos de aplicación de los vectores del sistema y no se refleja mediante alguna condición "adicional" (ésa que diferenciaba un vector aplicado de uno deslizante) la posibilidad (o certeza en su caso) de que la posición relativa de dichos puntos varíe por deformaciones de constitución (mecanismos) o de agotamiento de las características resistentes del material, la expresión del campo de momentos obtenida para un instante genérico puede llegar a no corresponder al campo de momentos efectivo en un instante determinado del sistema deformado, invalidando los cálculos estructurales basados en él (no la teoría en sí) o, cuanto menos, introduciendo una sensible desviación.

Evidentemente, el hecho de utilizar una herramienta exacta, como es la teoría de vectores deslizantes, no garantiza la exactitud en la predicción de los hechos físicos (reales) sino que unicamente posibilita una aproximación a los mismos basada en la experimentación. Una decisión errónea en las hipótesis iniciales de cálculo será responsabilidad de cada uno, no de la teoría en sí. Por tanto, al hacer uso de ella, deberemos asegurarnos previamente de la no deformabilidad del sistema material al que van a estar aplicados los vectores, o de su compensación mediante expresiones equivalentes adicionales cuando se trate de mecanismos de constitución; es decir, sistemas deformables de sólidos que, en general, no es lo mismo que sistemas de sólidos deformables en los que habrá que recurrir además a las características resistentes del material para determinar los puntos del sólido en los que, al no poder resistir los límites característicos, se puede desarrollar un mecanismo de forma natural.

Para ello nos serviremos de sucesivas transformaciones de sistemas en otros equivalentes, comenzando por asimilar las propias acciones exteriores a sistemas discretos o continuos reducidos, lo nos permitirá una aproximación en el nivel de estudio desde la totalidad del sólido, pasando por la "rebanada" de espesor diferencial hasta el "entorno del punto", en el que ya no tendrá sentido hablar de momentos dada su dimensión infinitesimal. Su empleo constituye, por tanto, el punto de partida de un proceso de cálculo que, mediante comprobaciones posteriores de su validez basadas en la resistencia del material, nos introducirán, dentro de unos límites admisibles, en la teoría de Elasticidad y, en su caso, de la Plasticidad.

4.2 CASOS ESPECIALES DE SISTEMAS DE VECTORES APLICADOS

Resumiendo, dada la identidad entre el campo de momentos de un sistema de vectores deslizantes y un sistema de vectores aplicados, lo único que podemos afirmar hasta ahora es que, a todos los efectos, en un instante dado será equivalente a un sistema de vectores aplicados cualquier sistema de vectores deslizantes que tenga los mismos invariantes y el mismo Eje Central, no existiendo un único sistema que responda a dichas características.

En consecuencia, tampoco podremos sustituir, en general, los vectores aplicados de un sistema por un único vector aplicado en un punto especial. En primer lugar porque eso sólo sería posible para los sistemas degenerados (de Automomento nulo) en los que podríamos encontrar puntos de momento nulo (los del Eje Central). Y en segundo lugar porque tendría que ser solo uno, entre los infinitos posibles, que gozara de alguna diferencia esencial. Existen, sin embargo, ciertos casos de vectores aplicados en los que sí podemos encontrar un punto del Eje con semejantes características:

- Unos son obvios y por tanto sin mayor particularidad: los sistemas de vectores con el mismo punto de aplicación. Son un caso particular de vectores concurrentes en los que el punto de concurrencia es a su vez el punto de aplicación y pueden sustituirse directamente por la Resultante del sistema aplicada en él, pero eso no significa que en los vectores concurrentes aplicados, en general, el punto de concurrencia se diferencie de los demás puntos del eje central, por lo que su interés es muy limitado.

- Otros son realmente interesantes por las futuras aplicaciones que nos van a simplificar el estudio de la Mecánica del sólido, lo que hace que centremos en ellos nuestra atención: nos referimos a los sistemas de vectores paralelos aplicados que, además de tener Eje Central como los deslizantes, serán los únicos que dispondrán de Centro, en el sentido de "punto de aplicación" de la Resultante con características especiales, que les hacen merecedores de una denominación especial

4.3 CENTRO DE VECTORES PARALELOS APLICADOS.

Supondremos la dirección común para todos los vectores del sistema definida por un vector unitario $\vec{\epsilon}$, de manera que cada vector podrá expresarse en la forma $\vec{a}_i = a_i\vec{\epsilon}$, donde $a_i\vec{\epsilon}$ podrá ser un número positivo o negativo según sea el sentido del vector.

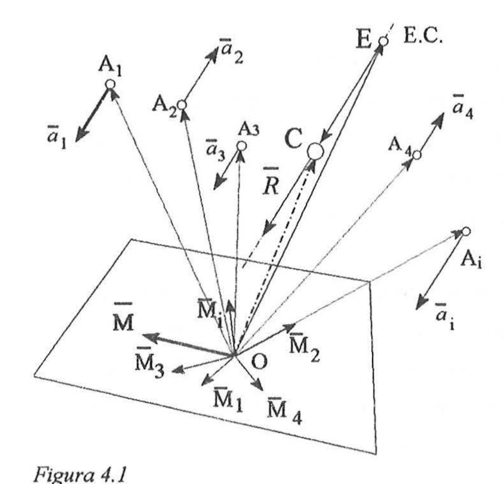


Figura 4.1

La resultante, como en el caso de vectores deslizantes, será $\vec{R} = \Sigma a_i\vec{\epsilon}$ y análogamente, como los momentos de cada vector respecto a un punto cualquiera serán normales a la dirección común $\vec{\epsilon}$, el momento resultante será normal a $\vec{R}$ y el Automomento nulo, pudiendo ser sustituido el sistema por un solo vector situado sobre el eje central. Ahora bien, si al tomar momentos respecto al punto O, en lugar de elegir como extremo de los vectores posición $\vec{r}_i$ un punto cualquiera de las respectivas rectas de acción de los vectores, elegimos precisamente los respectivos puntos A_i de aplicación de los vectores del sistema, aunque el resultado es el mismo conseguimos implicar dichos puntos en la expresión final:

$$\vec{M}_O = \Sigma\vec{M}_O^{(i} = \Sigma\,\vec{r}_i\times\vec{a}_i = \Sigma\,\vec{OA}_i\times a_i\vec{\epsilon} = (\Sigma\,a_i\vec{OA}_i)\times\vec{\epsilon} \qquad [4.1]$$

y denominando $\vec{r}$ al vector posición de un punto E cualquiera del eje central, en el que podemos suponer reducida la resultante $\vec{R}$ equivalente del sistema al ser nulo el momento en esos puntos, el momento de la resultante se expresará:

$$\vec{M}_O = \vec{r}\times\vec{R} = \vec{OE}\times\Sigma a_i\,\vec{\epsilon} = (\Sigma\,a_i\,\vec{OE})\times\vec{\epsilon} \qquad [4.2]$$

Al tener que coincidir el momento resultante del sistema respecto a O según *[4.1]* con el momento de la resultante del sistema respecto a este mismo punto de la *[4.2]* podremos escribir:

$$\begin{gathered}\vec{M}_O^{(R} = \Sigma\vec{M}_O^{(i} \Rightarrow (\Sigma a_i\vec{OA}_i)\times\vec{\epsilon} = (\Sigma a_i)\vec{OE}\times\vec{\epsilon} \Rightarrow \\ \Rightarrow (\Sigma a_i\vec{OA}_i)\times\vec{\epsilon} - (\Sigma a_i)\vec{OE}\times\vec{\epsilon} = \left[\Sigma a_i\vec{OA}_i - \Sigma a_i\vec{OE}\right]\times\vec{\epsilon} = 0\end{gathered} \qquad [4.3]$$

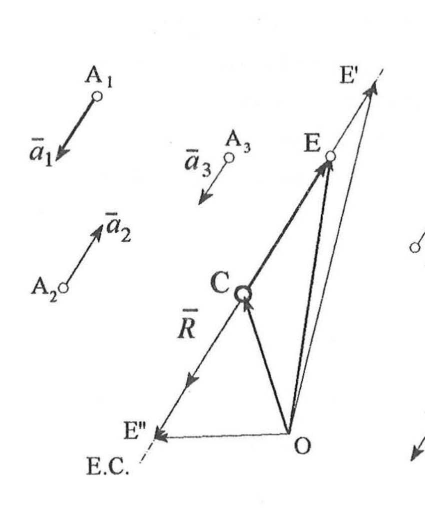


Figura 4.2

siendo, en general, nulo el producto vectorial de dos vectores cuando son paralelos $[\Sigma\,a_i\vec{OA}_i - \Sigma\,a_i\vec{OE}] \parallel \vec{\epsilon}$, lo que también podría expresarse mediante una combinación lineal: $\Sigma\,a_i\vec{OA}_i - \Sigma\,a_i\vec{OE} = \mu\,\vec{\epsilon}$ que nos permitiría escribir:

$$\vec{OE} = \frac{\Sigma\,a_i\vec{OA}_i}{\Sigma\,a_i} + \frac{\mu}{\Sigma\,a_i}\vec{\epsilon} = \frac{\Sigma\,a_i\vec{OA}_i}{\Sigma\,a_i} + \lambda\,\vec{\epsilon} \qquad [4.4]$$

donde λ es un número arbitrario, para cuyos diversos valores obtendremos diferentes vectores con la dirección común del sistema lo que nos permite interpretar la expresión vectorial obtenida como la suma dos vectores: el vector de posición respecto a O de un punto particular del eje central $\vec{OC}$ y otro vector $\vec{CE}$ contenido siempre en el eje central.

Es decir, como buscábamos un punto cualquiera del eje respecto al cual el momento fuera nulo, la *[4.4]* representa la ecuación vectorial de los puntos del eje central, ya que todos ellos cumplen dicha condición, siendo el definido por:

$$\vec{OC} = \vec{r}_C = \frac{\sum a_i \vec{r}_i}{\sum a_i} = \frac{\sum a_i \vec{OA}_i}{\sum a_i} \qquad [4.5]$$

el único punto del eje central que recoge información relativa a los puntos de aplicación de los vectores del sistema por lo que se le da el nombre de ***CENTRO DE VECTORES PARALELOS APLICADOS.***

4.3.1 PROPIEDADES DEL C.V.P. APLICADOS.

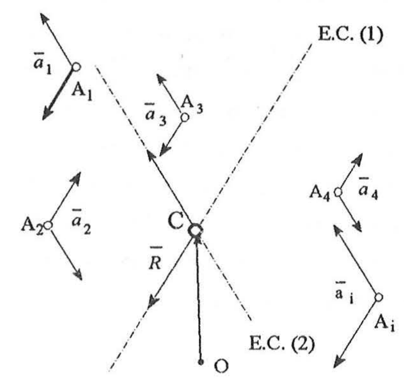


Figura 4.3

Es de notar que aunque varíe la dirección común de los vectores, no se altera la posición del punto del eje central dado por la *[4.5]* ya que no interviene en la expresión, constituyendo la diferencia más característica de estos sistemas. Asimismo, si se tratara de un sistema de vectores paralelos deslizantes la obtención del punto C dependería de los puntos elegidos en las respectivas rectas de acción de los vectores, aún siendo igualmente válida a efectos de momentos la elección de cualesquiera otros puntos de aplicación. Y como para cada opción se obtendría un punto diferente del Eje Central, no tendría sentido hablar de centro ya que ninguno tendría una connotación especial que le diferenciara de los demás. La existencia de Centro queda pues condicionada a los puntos de aplicación, pudiéndose resumir que:

... *"el centro de un sistema de vectores paralelos aplicados depende fundamentalmente de los puntos de aplicación de los vectores del sistema, independientemente de su dirección, a diferencia del eje central del sistema que, aun conteniendo dicho centro, depende de la dirección común y no de los puntos de aplicación"* ...

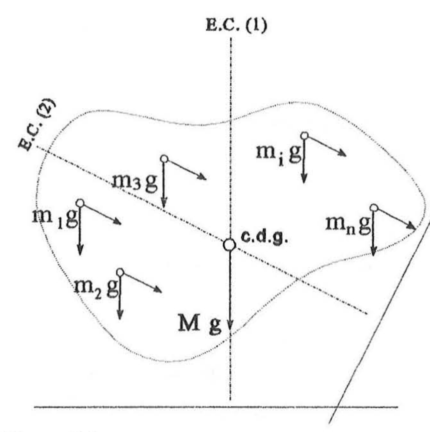


Figura 4.4

Una de las aplicaciones más notables del centro de vectores paralelos aplicados será la obtención del centro de gravedad de un sistema material (discreto o continuo) en el que los vectores $\vec{a}_i$ representarán el peso de las partículas o elementos que formen el sistema, siempre que el cuerpo sea lo suficientemente pequeño respecto a las dimensiones de la Tierra para que puedan considerarse paralelos dichos vectores y aceptar como invariable el valor de g para cada punto de aplicación. Con estos condicionantes las a_i se sustituirán por las masas m_i de los puntos del sistema, obteniéndose la conocida expresión que determinará el *centro de gravedad*, y que coincidirá en el ámbito de nuestro estudio con el centro de masas, c.d.m, que definiremos en su momento, aunque la denominación de c.d.g. será más usual.

4.3.2 OBTENCIÓN DEL C.V.P. APLICADOS. EXPRESIONES CARTESIANAS. CONSECUENCIAS

Para un sistema de vectores paralelos, cuya dirección común puede venir dada (aunque poco importa) por el unitario $\vec{\epsilon} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$ y los vectores del sistema definidos por su valor a_i tal que $\vec{a}_i = a_i(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k})$ y su punto de aplicación $A_i(x_i, y_i, z_i)$, la expresión vectorial del c.v.p.a. *[4.5]* podrá escribirse:

$$\vec{r}_C = \vec{OC} = \frac{\sum a_i \vec{OA}_i}{\sum a_i} = \frac{\sum a_i x_i}{\sum a_i}\vec{i} + \frac{\sum a_i y_i}{\sum a_i}\vec{j} + \frac{\sum a_i z_i}{\sum a_i}\vec{k} = \vec{x}_C + \vec{y}_C + \vec{z}_C \qquad [4.6]$$

de forma que las coordenadas del punto C buscado serán precisamente las componentes de ese vector, pudiendo ser útil, a efectos simplemente operativos, la elaboración del siguiente cuadro:

x_i	y_i	z_i	⇨ a_i ⇨	$a_i x_i$	$a_i y_i$	$a_i z_i$
x_1	y_1	z_1	a_1	$a_1 x_1$	$a_1 y_1$	$a_1 z_1$
x_2	y_2	z_2	a_2	$a_2 x_2$	$a_2 y_2$	$a_2 z_2$
x_3	y_3	z_3	a_3	$a_3 x_3$	$a_3 y_3$	$a_3 z_3$
...	...	...	...	...	...	...
x_n	y_n	z_n	a_n	$a_n x_n$	$a_n y_n$	$a_n z_n$
x_C	y_C	z_C	⇦ $\sum a_i$ ⇦	$\sum a_i x_i$	$\sum a_i y_i$	$\sum a_i z_i$

$$x_C = \frac{\Sigma\, a_i\, x_i}{\Sigma\, a_i} \qquad y_C = \frac{\Sigma\, a_i\, y_i}{\Sigma\, a_i} \qquad z_C = \frac{\Sigma\, a_i\, z_i}{\Sigma\, a_i} \qquad [4.7]$$

- Evidentemente, el centro obtenido será el mismo si en lugar del valor a_i, correspondiente al módulo con su signo de cada vector, se toma un factor de proporción b_i con otro vector $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ no unitario, factor común a todos los vectores del sistema, de forma que $\vec{a}_i = b_i(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$ y $\vec{R} = \Sigma b_i(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$.

  En efecto, expresando dicho vector en función del unitario, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} = b(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}) = b\,\vec{\epsilon}$, los vectores del sistema se podrán expresar a su vez en la forma $\vec{a}_i = b_i b\,\vec{\epsilon} = a_i\vec{\epsilon}$ y como $a_i = b_i b$ las coordenadas del centro serán $x_C = \frac{\Sigma\, a_i\, x_i}{\Sigma\, a_i} = \frac{\Sigma\, b_i b\, x_i}{\Sigma\, b_i b} = \frac{b\Sigma\, b_i\, x_i}{b\Sigma\, b_i} = \frac{\Sigma\, b_i\, x_i}{\Sigma\, b_i}$ y análogamente $y_C = \frac{\Sigma\, a_i\, y_i}{\Sigma\, a_i} = \frac{\Sigma\, b_i\, y_i}{\Sigma\, b_i}$ $z_C = \frac{\Sigma\, a_i\, z_i}{\Sigma\, a_i} = \frac{\Sigma\, b_i\, z_i}{\Sigma\, b_i}$.

- Si los puntos de aplicación de los vectores del sistema se encuentran todos en un mismo plano, el Centro se encontrará también en él ya que, adoptando dicho plano como coordenado, por ejemplo oxy, se anularán las coordenadas respectivas de los puntos de aplicación según la dirección normal al plano $z_i = 0$ anulándose, en consecuencia, el sumatorio $\Sigma a_i z_i = 0$ y la coordenada correspondiente a C: $z_C = \frac{\Sigma\, a_i\, z_i}{\Sigma\, a_i} = 0$.

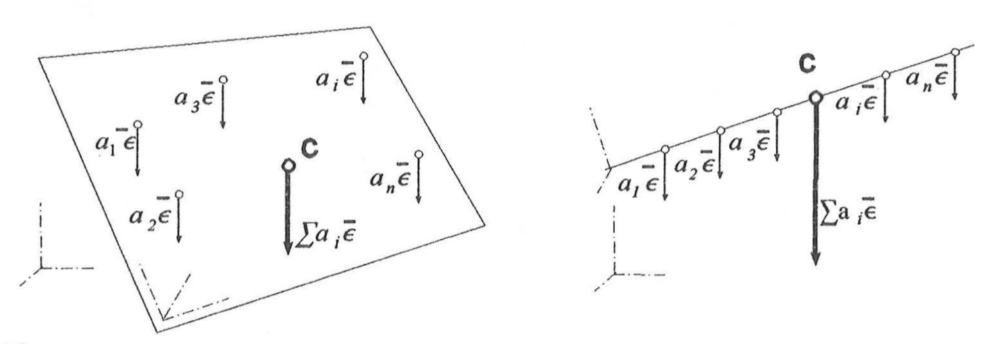


Figura 4.5

Análogamente, si los puntos de aplicación de los vectores del sistema se encuentran alineados sobre un mismo eje, el Centro se encontrará también en él ya que, adoptando dicho eje como coordenado, por ejemplo ox, se anularán las coordenadas respectivas de los puntos de aplicación según las direcciones $y_i = 0$, $z_i = 0$, anulándose, en consecuencia, los sumatorios $\Sigma a_i y_i = 0$ y $\Sigma a_i z_i = 0$ y las coordenadas correspondientes de C: $y_C = \frac{\Sigma\, a_i\, y_i}{\Sigma\, a_i} = 0$ y $z_C = \frac{\Sigma\, a_i\, z_i}{\Sigma\, a_i} = 0$.

- Por último, si se da simetría de los vectores del sistema respecto a un plano o recta cualquiera podemos afirmar que el centro se encontrará en dicho elemento ya que si lo adoptamos como plano (o eje) coordenado oyz, para cada valor a_i asociado a un punto de aplicación de coordenada x_i, podremos encontrar otro $a'_i = a_i$ tal que $x'_i = -x_i$ resultando $x_C = \frac{\Sigma\, a_i\, x_i + \Sigma\, a'_i\, x'_i}{\Sigma\, a_i + \Sigma a'_i} = \frac{\Sigma\, a_i\, x_i - \Sigma\, a_i\, x_i}{\Sigma\, a_i + \Sigma a_i} = \frac{\Sigma\,[a_i - a_i]\, x_i}{\Sigma\, 2 a_i} = 0$

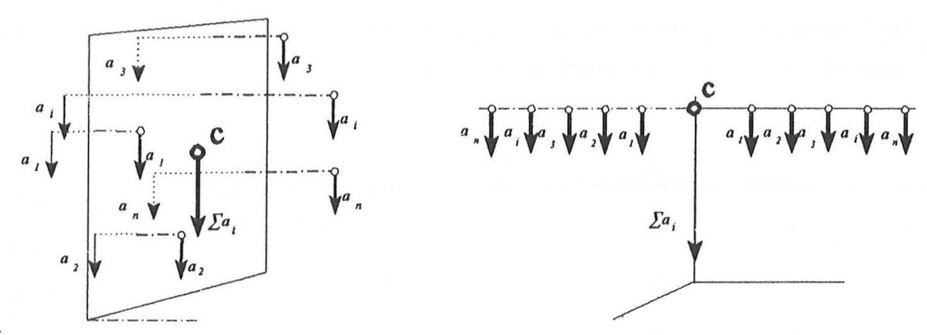


Figura 4.6

Consecuencia de esta última será, a su vez, que el centro de vectores paralelos aplicados no cambiará de posición si los puntos de aplicación de cada pareja se alejan o acercan en igual medida del correspondiente elemento de simetría, lo que tendrá su utilidad en caso de "deformaciones" simétricas del soporte material.

4.3.3 OBTENCIÓN GRÁFICA DEL C.V.P. APLICADOS.

Apoyándonos en las consecuencias anteriores y teniendo en cuenta que en los sistemas de vectores paralelos el Automomento es nulo y por tanto también el momento en los puntos del eje central, si trazamos a escala dos vectores paralelos aplicados, el centro C del sistema se encontrará: en primer lugar, alineado con los respectivos puntos de aplicación A y B y, en segundo lugar, a distancias AC y BC de los vectores tales que $AC \cdot a = AB \cdot b$ para que se anule el momento en C, ya que los ángulos α y β son suplementarios y, por tanto, sen α = sen β, pudiéndose prescindir de ellos en la expresión anterior que, escrita en la forma $\frac{AC}{b} = \frac{AB}{a}$ nos viene a evidenciar una semejanza de los triángulos obtenidos al representar gráficamente el vector $\vec{a}$ en la recta de acción de $\vec{b}$ y viceversa.

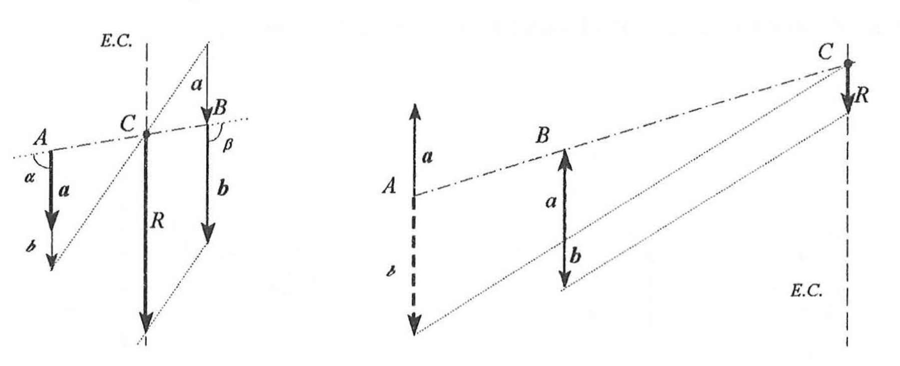


Figura 4.7

En la figura anterior se hace patente el hecho de que si ambos vectores tienen el mismo sentido, el centro se encontrará entre los respectivos puntos de aplicación de forma que el sentido del momento de uno de los vectores sea igual y opuesto al del otro para que se puedan anular. Por el contrario, si los sentidos de los vectores son opuestos, el centro se encontrará siempre de lado del vector de módulo mayor para que la distancia a él sea menor y pueda compensar el momento del vector más alejado, de sentido contrario y menor valor modular.

En dicha figura se ha obtenido el Centro directamente como intersección de la recta que une los respectivos puntos de aplicación, coincidente con los puntos final y origen de los vectores traspuestos de $\vec{a}$ y $\vec{b}$, con la recta que resulta de unir a su vez los puntos de dichos vectores origen y final. La construcción a partir de otros puntos arbitrarios de las respectivas rectas de acción sería igualmente válida, aunque no se obtendría C sino otro punto E cualquiera del eje central, obteniéndose el centro en la intersección de la paralela a la dirección común por E con la recta de unión de los puntos de aplicación.

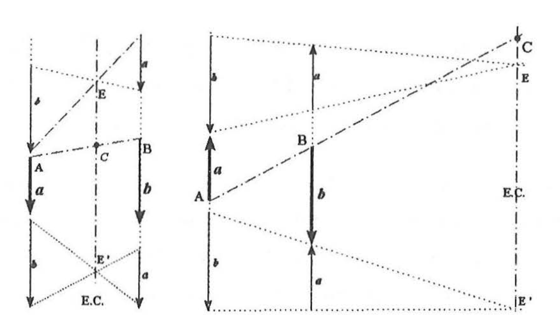


Figura 4.8

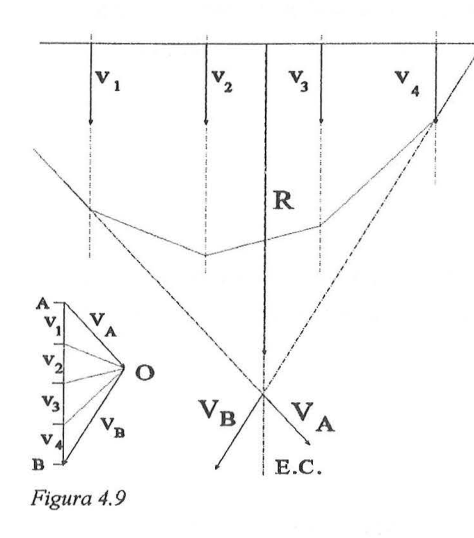


Figura 4.9

En sistemas planos podría también obtenerse el Centro a partir del polígono funicular cuando los puntos de aplicación estuvieran alineados, ya que directamente sería el punto de intersección del eje de alineación con el eje central. La única diferencia con el método expuesto en el tema anterior para sistemas de vectores generales es que las rectas de acción de los vectores son paralelas, pero ello no introduce ninguna diferenciación.

Por el contrario, frente al método anterior, cuando el número de vectores es elevado resulta más útil que calcular sucesivamente el centro de cada dos vectores hasta que el sistema queda reducido a la resultante sobre el eje central. En el límite, para sistemas continuos formados por un número infinito de vectores infinitésimos, el polígono funicular quedará convertido en una curva tangente a todos los lados del polígono trazado para un sistema discreto equivalente, cuyo estudio analítico plantearemos a continuación.

4.4 APLICACIÓN A SISTEMAS CONTINUOS

Por su generalización al campo de las estructuras y cimentaciones y dado que se trata de una aplicación inmediata de los sistemas de vectores paralelos aplicados, vamos a estudiar en este capítulo los sistemas continuos de vectores aplicados, cuya única diferencia con los sistemas discretos será en la introducción del concepto de vector infinitesimal, ya que el procedimiento a seguir será idéntico al estudiado para sistemas de vectores deslizantes en general.

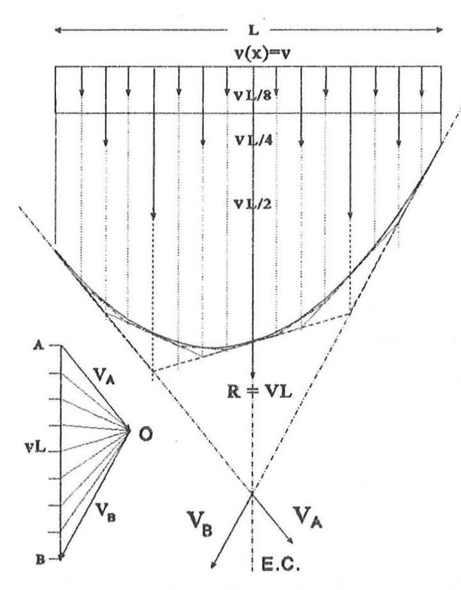


Figura 4.10

Para ello supondremos el proceso inverso, imaginando que tenemos un vector $\vec{R}$ aplicado en el punto medio de un segmento recto de longitud L. Un sistema equivalente podrá ser el formado por dos vectores paralelos de igual módulo (R/2), dirección y sentido, con tal que estén situados a ambos lados y a la misma distancia de la recta de acción de $\vec{R}$ y tengan la misma dirección común ya que ahora pasa a ser el eje central de cualquier sistema equivalente de vectores paralelos y el momento en los puntos que lo forman se ha de anular.

Como la distancia puede ser cualquiera, elegiremos como rectas de acción de los nuevos vectores los puntos medios de cada mitad simplemente por razones geométricas que nos facilitarán la comprensión. Repitiendo el proceso para cada uno de los vectores obtenidos, obtendríamos un nuevo sistema equivalente formado por cuatro vectores paralelos de igual módulo (R/4), dirección y sentido, aplicados respectivamente sobre los puntos medios de cada tramo de longitud L/4 del segmento inicial y, a continuación, otro sistema formado por ocho vectores paralelos de módulo R/8 aplicados sobre los puntos medios de los segmentos de longitud L/8.

En el límite, cuando los segmentos tendieran a un valor muy pequeño, dl, los vectores tendrían por módulo un valor infinitesimal que podría expresarse como v dl, siendo v = R/L una función que nos da un *valor finito de módulo por unidad de longitud*, constante en este caso ya que en cada sistema equivalente hemos elegido vectores de igual valor modular.

Es decir, a diferencia de los sistemas discretos, definidos por el valor modular de los vectores y sus puntos de aplicación, los sistemas continuos vienen dados por una función de valor modular por unidad de longitud definida a lo largo de toda la línea de aplicación, sobre la que se localizará, evidentemente, el centro de los vectores paralelos siempre que dicha línea sea recta, ya que de otro modo tendríamos que obtener la posición del centro como hemos visto en el epígrafe anterior.

Volviendo ahora al proceso directo, analizaremos como obtendríamos la resultante y el momento en un punto cualquiera de un sistema continuo de vectores paralelos aplicados, basándonos en la suma de elementos infinitésimos que nos remite al concepto de integral.

4.4.1 VALOR MODULAR CONSTANTE V(X) = A.

El valor de un vector del sistema aplicado sobre un elemento dx a una distancia genérica x de uno de los extremos, elegido como origen de coordenadas será dV = v(x) dx = a dx y la Resultante del sistema, entendida como suma de todos los vectores dV, desde x=0 hasta x=L será:

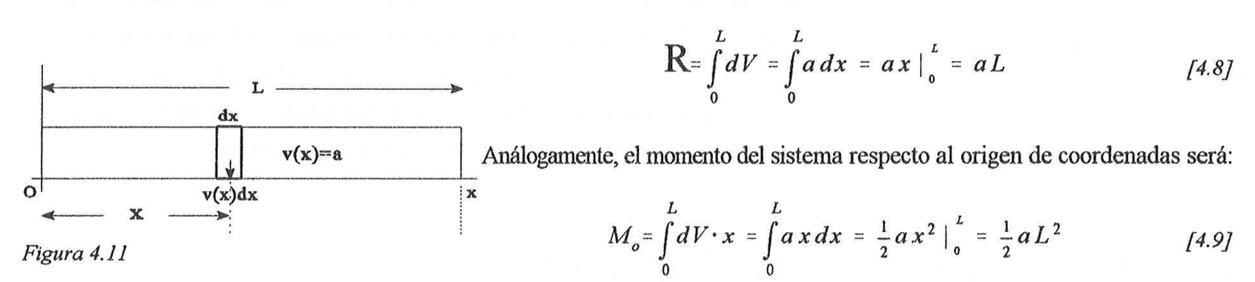


Figura 4.11

$$R = \int_0^L dV = \int_0^L a\,dx = a\,x\,\Big|_0^L = a\,L \qquad [4.8]$$

Análogamente, el momento del sistema respecto al origen de coordenadas será:

$$M_o = \int_0^L dV \cdot x = \int_0^L a\,x\,dx = \frac{1}{2} a\,x^2\,\Big|_0^L = \frac{1}{2} a\,L^2 \qquad [4.9]$$

que equivale, evidentemente al momento de la resultante aplicada sobre el eje central, por lo que la posición del centro de vectores aplicados, se obtiene, a pesar de su inmediatez, de la expresión:

$$x_C = \frac{M_O}{R} = \frac{\int_0^L dV \cdot x}{\int_0^L dV} = \frac{\int_0^L a\,x\,dx}{\int_0^L a\,dx} = \frac{\frac{1}{2} a\,x^2\,\Big|_0^L}{a\,x\,\Big|_0^L} = \frac{\frac{1}{2} a\,L^2}{a\,L} = \frac{L}{2} \qquad [4.10]$$

4.4.2 DISTRIBUCIÓN LINEAL V(X) = AX.

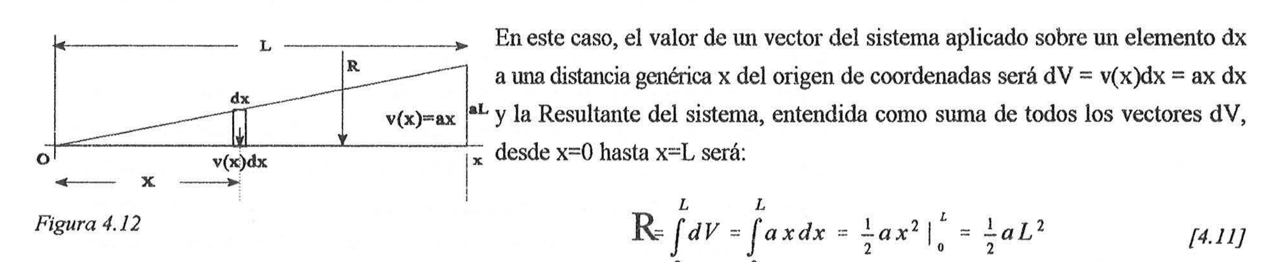


Figura 4.12

En este caso, el valor de un vector del sistema aplicado sobre un elemento dx a una distancia genérica x del origen de coordenadas será dV = v(x)dx = ax dx y la Resultante del sistema, entendida como suma de todos los vectores dV, desde x=0 hasta x=L será:

$$R = \int_0^L dV = \int_0^L a\,x\,dx = \frac{1}{2} a\,x^2\,\Big|_0^L = \frac{1}{2} a\,L^2 \qquad [4.11]$$

cuyo valor puede interpretarse como el área encerrada por la función v(x) y el eje ox en los límites definidos (definición de integral) al igual que en el caso anterior.

Análogamente, el momento del sistema respecto al origen de coordenadas será:

$$M_O = \int_0^L dV \cdot x = \int_0^L a x^2 dx = \frac{1}{3} a x^3 \Big|_0^L = \frac{1}{3} a L^3 \qquad [4.12]$$

que equivale, evidentemente al momento de la resultante aplicada sobre el eje central, por lo que la posición del centro de vectores aplicados, será:

$$x_C = \frac{M_O}{R} = \frac{\frac{1}{3} a x^3 \Big|_0^L}{\frac{1}{2} a x^2 \Big|_0^L} = \frac{\frac{1}{3} a L^3}{\frac{1}{2} a L^2} = \frac{2}{3} L \qquad [4.13]$$

4.4.3 DISTRIBUCIÓN V(X) = AX².

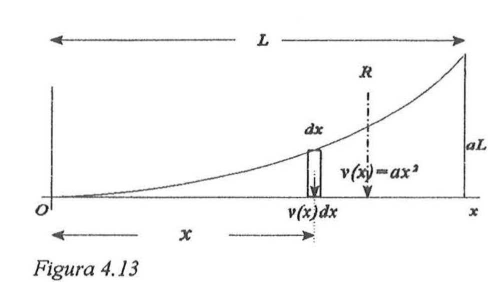


Figura 4.13

En este caso, el valor de un vector del sistema aplicado sobre un elemento dx a una distancia x del origen de coordenadas será $dV = v(x)dx = ax^2\, dx$ y la Resultante del sistema, entendida como suma de todos los vectores dV, desde x=0 hasta x=L será:

$$R = \int_0^L dV = \int_0^L a x^2 dx = \frac{1}{3} a x^3 \Big|_0^L = \frac{1}{3} a L^3 \qquad [4.14]$$

y el momento del sistema respecto al origen de coordenadas será:

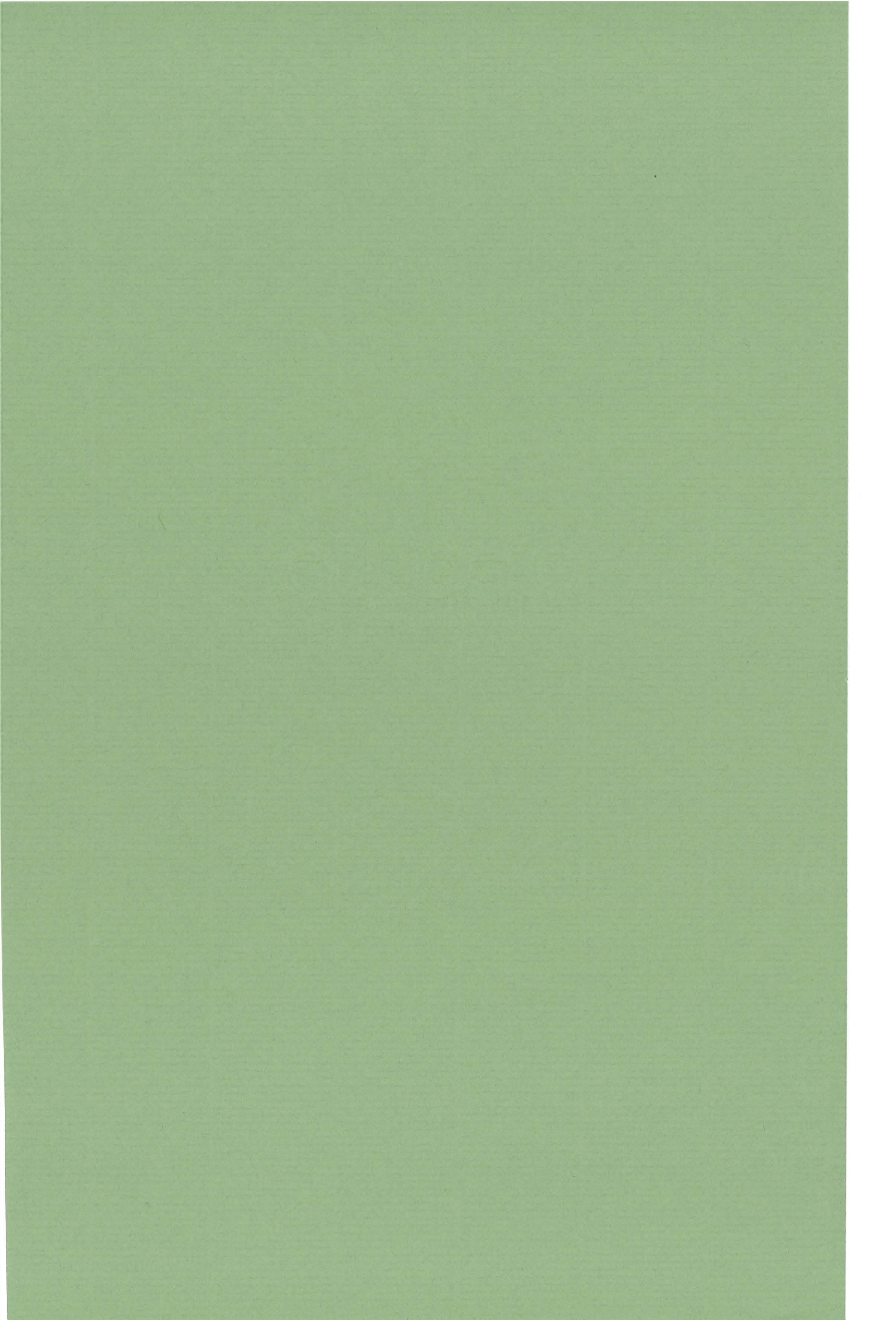
$$M_O = \int_0^L dV \cdot x = \int_0^L a x^3 dx = \frac{1}{4} a x^4 \Big|_0^L = \frac{1}{4} a L^4 \qquad [4.15]$$

que equivale, nuevamente al momento de la resultante aplicada sobre el eje central, por lo que la posición del centro de vectores aplicados, será:

$$x_C = \frac{M_O}{R} = \frac{\frac{1}{4} a x^4 \Big|_0^L}{\frac{1}{3} a x^3 \Big|_0^L} = \frac{\frac{1}{4} a L^4}{\frac{1}{3} a L^3} = \frac{3}{4} L \qquad [4.16]$$

En cualquier caso, conocidos el valor de la resultante y el momento resultante en un punto, por ejemplo O, o bien la posición del eje central, para conocer el valor del momento en cualquier otro punto no haría falta calcular nuevas integrales, sino que se haría uso de la ecuación de paso de momentos, sabiendo que se trata de un vector perpendicular al plano del sistema y que el signo puede tomarse arbitrariamente adoptando, por ejemplo como hemos hecho para los casos anteriores, el criterio positivo asociado al sentido dextrógiro o bien, si consideramos el eje oz hacia nosotros, el sentido positivo iría asociado a levógiro.

INDICE DE MATERIAS



CUADERNO

16.01

CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/ijh/apuntes.html